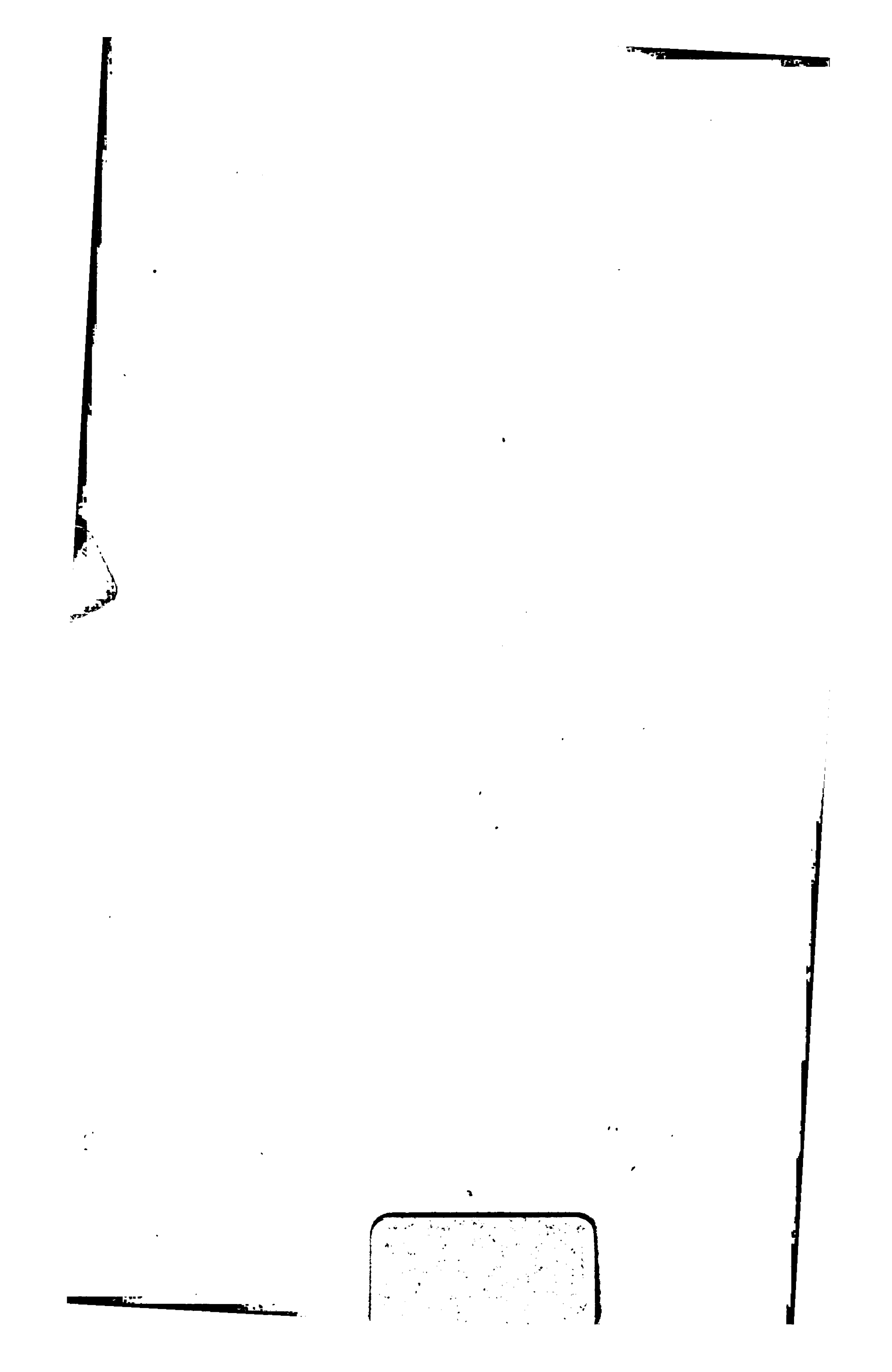
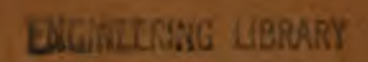
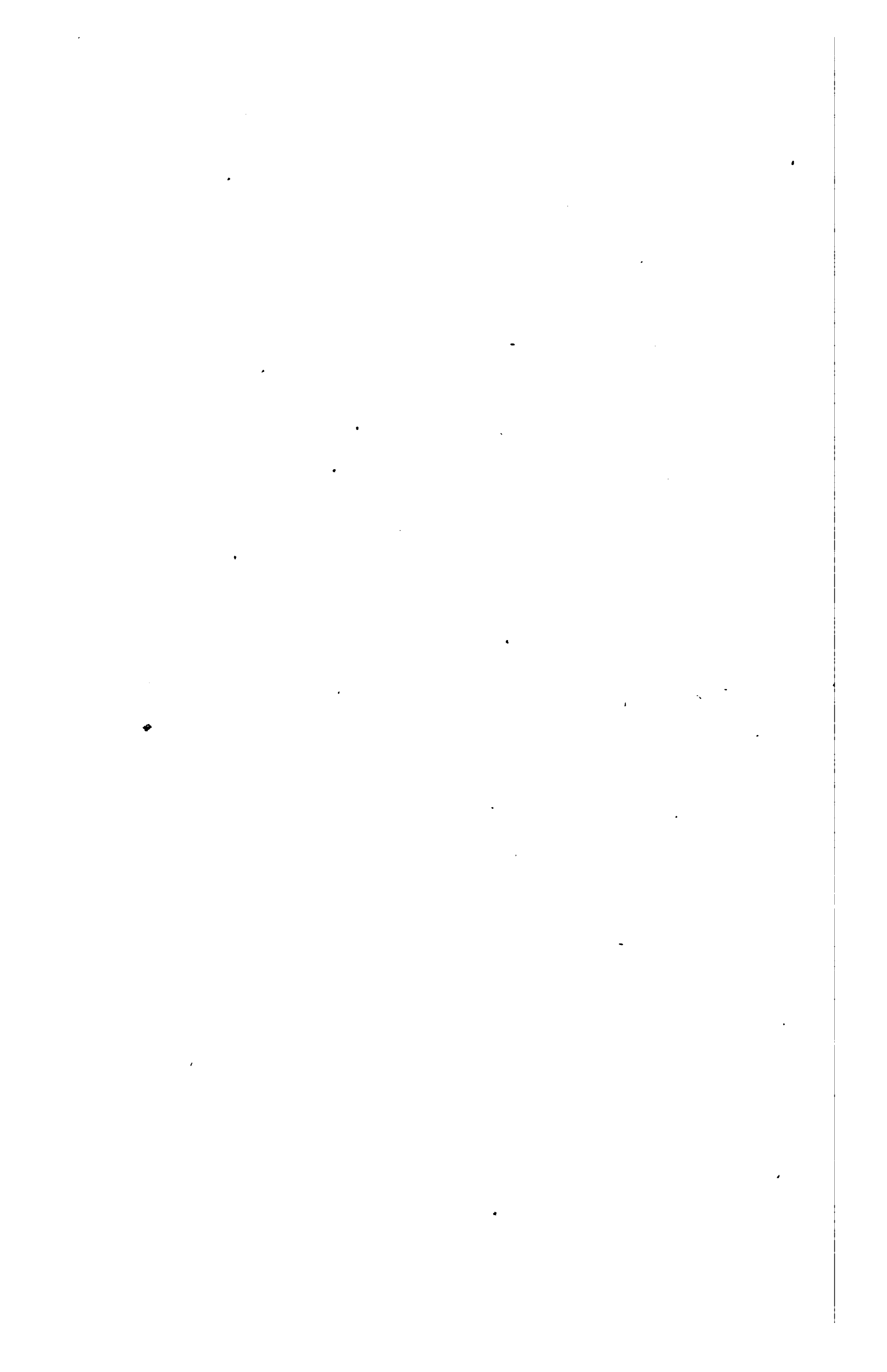



ENGINEERING LIBRARY



THEORETISCHE MECHANIK.

VON

J. SOMOFF,

MITGLIED DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND PROF. EM. DER UNIVERSITÄT ZU ST. PETERSBURG.

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT

VON

ALEXANDER ZIWET

II. THEIL.

EINLEITUNG IN DIE STATIK UND DYNAMIK.

STATIK.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1879.

EINLEITUNG

IN DIE

STATIK UND DYNAMIK.

STATIK.

VON

J. SOMOFF,

MITGLIED DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND PROF. EM. DER UNIVERSITÄT
ZU ST. PETERSBURG.

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT

VON

ALEXANDER ZIWET.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

Vorwort des Uebersetzers.

Der vorliegende zweite Theil der theoretischen Mechanik von J. Somoff zeichnet sich, gleich dem ersten, durch vielseitige Anwendung der geometrischen Grössen und Punktfunctionen, sowie überhaupt geometrischer Methoden aus. Als Einleitung in die Statik und Dynamik ist eine „Geometrie der Massen" vorausgeschickt, welche, von den ebenso präcisen, wie allgemeinen Cauchy'schen Definitionen und Formeln zur Behandlung von Raumgrössen und Massen ausgehend, eine ziemlich ausführliche Theorie der Momente ersten und zweiten Grades, sowie der „Variation der Massen und Raumgrössen" giebt. Dieser letztere Abschnitt ist von besonderem Interesse; er enthält eine ganz allgemeine, von der Art des Coordinatensystems unabhängige Definition des Differentialparameters zweiter Ordnung. In der eigentlichen Statik ist die Theorie des Potentials und der Attraction eingehend und eigenartig behandelt. Die verschiedenen Formen der Gleichgewichtsbedingungen eines Kräftesystems werden durch Behandlung des Vectors und des Momentes einer Kraft als geometrischer Grössen auf ihre einfachste Gestalt zurückgeführt. Auf Grund dieser allgemeinen Beziehungen giebt dann das IV. Capitel eine ausführliche Behandlung des Gleichgewichts am unveränderlichen Punktsystem und das V. Capitel die Theorie der Aequivalenz der Kräfte. Den Schluss bilden in dem VI. Capitel die vom Verfasser in neuer und selbstständiger Behandlungsweise durchgeführten Untersuchungen von Möbius und Minding über Centralpunkt und Centralebene, über Gleichgewichtsaxen und Axen der Aequivalenz.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass von dem zweiten Bande nur die Einleitung (Geometrie der Massen), sowie das I. und II. Capitel der Statik bei Lebzeiten des Verfassers erschienen sind. Jedoch war der übrige Theil (das III. bis VI. Capitel) im Manuscript vollständig druckfertig und wurde auf Veranlassung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften ohne irgend wesentliche Aenderungen herausgegeben.

Auch die vorliegende deutsche Uebersetzung hat sich nirgends Aenderungen erlaubt.

Karlsruhe, 1879.

Alexander Ziwet,
Stud. der Ingenieurwissenschaften.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung in die Statik und Dynamik.

A. Berechnung von Raumgrössen und Massen. — Mittelwerth einer Punktfunction. — Mittlere Dichtigkeit einer Masse. — Massenmittelpunkt 1

B. Methoden zur Bestimmung von Massenmittelpunkten . . . 22

C. Quadratische Momente in Bezug auf Ebenen. — Trägheitsmomente. — Hauptaxen 72

D. Variationen von Massen und Raumgrössen. — Differentialparameter zweiter Ordnung von Punktfunctionen. — Thermometrische Functionen. — Die Green'schen Formeln 106

Statik.

I. Capitel. Der continuirliche materielle Körper. — Der materielle Punkt. — Sätze der Mechanik, welche die Abhängigkeit der kinematischen Grössen der Bewegung eines materiellen Punktes von den Ursachen der Bewegung bestimmen. — Dynamische Masse eines Punktes und eines Körpers. — Maass der Kraft. — Geometrische Derivirte der Kraft. — Zusammensetzung der Kräfte. — Gleichheit der Action und Reaction der Molecularkräfte. — Trägheitsmittelpunkt. — Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes 154

II. Capitel. Potential einer Kraft. — Definition der Kraft vermittelst ihres Potentials. — Potential der Kraft der gegenseitigen Wirkung zweier Punkte aufeinander, wenn diese Kraft eine Function des Abstandes der Punkte allein ist. — Zusammensetzung derartiger Kräfte. — Resultante der Kräfte, die durch die Wirkung einer continuirlichen Masse auf einen gegebenen Punkt entstehen. — Potential dieser Resultante. — Kräfte, die den Quadraten der Abstände der aufeinander wirkenden Punkte von einander umgekehrt proportional sind. — Anziehung nach dem Newton'schen Gesetze für Massen, die über Flächen vertheilt sind. — Der Green'sche Satz. — Methode der elektrischen Bilder von W. Thomson 176

Seite

III. Capitel. Arbeit einer Kraft und eines Kräftesystems. — Vector und Moment einer Kraft. — Hauptvector und Hauptmoment eines Kräftesystems. — Bedingungen, die zum Gleichgewicht aller auf ein beliebiges System materieller Punkte wirkenden Kräfte erforderlich sind. — Bedingungen, die für das Gleichgewicht aller auf ein unveränderliches Punktsystem wirkenden Kräfte genügend sind. — Kleinstes Hauptmoment und Centralaxe eines Kräftesystems 260

IV. Capitel. Gleichgewicht eines Systems von Kräften, die an einem unveränderlichen Punktsystem angreifen. — Bestimmungsweisen eines solchen Kräftesystems 294

V. Capitel. Aequivalenz der auf ein unveränderliches Punktsystem wirkenden Kräfte. — Reduction eines Kräftesystems auf eine oder zwei Kräfte. — Specialfälle der Aequivalenz der Kräfte 323

VI. Capitel. Eigenschaften von Kräften, die sich geometrisch nicht ändern, wenn ihre unveränderlich untereinander verbundenen Angriffspunkte eine beliebige Verschiebung erleiden 355

Einleitung in die Statik und Dynamik.

Geometrie der Massen.

A. Berechnung von geometrischen Raumgrössen und von Massen. — Mittelwerth einer Punktfunction. — Mittlere Dichtigkeit einer Masse. — Massenmittelpunkt.

1. Ist E eine geometrische Raumgrösse von einer, zwei oder drei Dimensionen und m eine in der Weise von E abhängende Grösse, dass jedem Werthe von E ein bestimmter Werth von m entspricht, der sich gleichzeitig mit jenem ändert und gleichzeitig mit ihm zu Null wird, so kann man m als einen gewissen *Gehalt* der Raumgrösse E betrachten und als eine *Masse, deren Raum* E *ist*, bezeichnen.*) In diesem Sinne kann man die Zeit, während der sich ein Punkt bewegt, als die Masse des von ihm zurückgelegten Weges (einer linearen Raumgrösse) ansehn; das Volumen eines über einem ebenen Flächenraume E errichteten und von einer beliebigen Fläche S begrenzten Cylinders kann man als Masse des Flächenraums E, oder auch als Masse des durch den Cylinder ausgeschnittenen Theiles der Fläche S betrachten.

Ist E ein Volumen und m ein anderes, welches Punkte enthält, die in einer gewissen Abhängigkeit von den Punkten des Volumens E stehen, z. B. die Punkte, die man durch homographische Transformation der Punkte von E oder nach der Methode der reciproken Radienvectoren (s. Kinematik, § 59) erhält, so kann man m als Masse in dem Volumen E ansehen, und umgekehrt E als Masse in dem Volumen m.

*) Cauchy nennt die Grössen E und m *gleichzeitig bestehende* (coexistantes). S. Cauchy, Exercices d'analyse et de physique mathématique. T. II, pag. 188.

Es sei nun ΔE ein unendlich kleiner Theil von E, der keine einzige endliche Dimension hat, in dem also der Abstand irgend zweier seiner Punkte unendlich klein ist; Δm sei der entsprechende Theil der Masse m. Dann ist das Verhältniss $\frac{\Delta m}{\Delta E}$ eine Grösse, die sich, wenn sich alle Dimensionen von ΔE der Null nähern, einem gewissen Grenzwerthe ϱ nähert, welcher im Allgemeinen eine Function von einem der in der Raumgrösse E enthaltenen Punkte sein wird. Eine solche Function nennt man die *Dichtigkeit* der Masse m in dem betreffenden Punkte M.

Ist z. B. E der von einem Punkte in der Zeit m durchlaufene Weg und v die einer beliebigen Lage M des beweglichen Punktes entsprechende Geschwindigkeit, so ist $\varrho = \frac{1}{v}$ die Dichtigkeit der Masse m im Punkte M.

In dem oben angeführten Beispiele des Volumens eines über dem Flächenraume E als Basis errichteten und von einer Fläche S begrenzten Cylinders ist die Dichtigkeit die Länge einer, der Erzeugenden des Cylinders parallelen, von E und S begrenzten geraden Strecke. Ist m die Figur, in welche eine Figur E vermittelst der Transformation durch reciproke Radienvectoren übergeht und sind M' und M zwei homologe Punkte jener Figuren, r' und r deren Abstände von dem Pole O, so dass also die Bedingung $rr' = c^2$ besteht, so ist $\frac{r'^3}{r^3} = \frac{c^6}{r^6}$ die Dichtigkeit der Masse m, die in dem Volumen E enthalten ist. (S. Kinematik, § 60, S. 137 unten.)

Ist die Dichtigkeit ϱ eine constante Grösse, d. h. hat sie denselben Werth für alle Punkte der Raumgrösse E, so nennt man die Masse m *homogen*.

2. Denken wir uns die ganze Raumgrösse E in unendlich kleine Theile ΔE getheilt, die keine einzige endliche Dimension haben, und die Masse m in entsprechende Theile Δm, so ist

$$E = \Sigma \Delta E \text{ und } m = \Sigma \Delta m,$$

wo das Zeichen Σ die Summe aller Theile von der Art ΔE, resp. Δm bedeutet. Die Summe $\Sigma \Delta E$ kann man durch den Grenzwerth ersetzen, welchem sich die Summe der sogenannten

Differentialelemente der Raumgrösse E nähert, wenn alle Dimensionen von E sich der Null nähern. Das Differentialelement dE der Raumgrösse E ist eine, von derselben Ordnung wie ΔE unendlich kleine Grösse und wird bekanntlich durch das Product einer gewissen Function eines Punktes der Raumgrösse in die Differentiale einer, zweier oder dreier Coordinaten dieses Punktes ausgedrückt; dabei genügt es der Bedingung, dass das Verhältniss $\frac{dE}{\Delta E}$ sich der Einheit nähert, wenn die Dimensionen der beiden Grössen dE und ΔE sich der Null nähern. Der Grenzwerth der Summe der Elemente dE wird durch das Integral $\int dE$ ausgedrückt.*)

Das Product der Dichtigkeit ϱ der Masse m in das Element dE der Raumgrösse, d. h. die Grösse ϱdE ist das Differentialelement dm der Masse m, und man kann $\Sigma \Delta m$ durch das Integral $\int \varrho dE$ ersetzen, wobei die Integration nach den Coordinaten zwischen denselben Grenzen auszuführen ist, wie bei der Integration $\int dE$. Es dürfte nicht überflüssig sein zu zeigen, mit welchem Rechte die Summe $\Sigma \Delta m$ durch das Integral $\int dm$, worin $dm = \varrho dE$ ist, ersetzt werden darf.

Das Verhältniss $\frac{\Delta m}{dE} = \frac{\Delta m}{\Delta E} \cdot \frac{\Delta E}{dE}$ hat die Dichtigkeit ϱ zur Grenze; man kann daher setzen

$$\Delta m = (\varrho + \alpha)\, dE,$$

wo α eine unendlich kleine Grösse bedeutet; mithin ist:

$$\lim \Sigma \Delta m = \lim \Sigma \varrho dE + \lim \Sigma \alpha dE.$$

Bezeichnen nun a und b den kleinsten und den grössten der Werthe von α, so hat man

$$a < \alpha < b \quad \text{und} \quad a dE < \alpha dE < b dE,$$

woraus folgt:

$$a < \frac{\Sigma \alpha dE}{\Sigma dE} < b.$$

Da die Grössen a und b beim Grenzübergange verschwinden, so verschwindet auch

$$\frac{\lim \Sigma \alpha dE}{\lim \Sigma dE} = \frac{\lim \Sigma \alpha dE}{E};$$

*) Wie aus der Integralrechnung bekannt; s. z. B. Serret, Cours de calcul diff. et intégral. Paris 1868. T. II.

mithin ist: $\lim \Sigma \alpha dE = 0$. Hiermit wird aber

$$\lim \Sigma \Delta m = \lim \Sigma \varrho dE,$$

also

$$m = \int \varrho dE.$$

Wenn allgemein ϱ irgend eine Function eines Punktes der Raumgrösse E ist, so repräsentirt das über die ganze Raumgrösse E ausgedehnte Integral $\int \varrho dE$ eine gewisse in E enthaltene Masse m, deren Dichtigkeit ϱ ist; dabei kann ϱ eine reelle positive oder negative, oder sogar imaginäre Grösse sein.

3. Ist E eine Linie s, so hat dE die Form $ds = f(q)dq$, wo q eine der Coordinaten eines Punktes dieser Linie oder eine andere Variable ist, als deren Functionen die Coordinaten ausgedrückt werden.

Ist ferner E eine Fläche S und ist ein Punkt M derselben durch zwei Coordinaten q_1 und q_2 bestimmt, deren reciproke Parameter a_1 und a_2 sind, so kann man für dE oder dS den Flächeninhalt eines Parallelogramms wählen, dessen Seiten $a_1 dq_1$ und $a_2 dq_2$ auf den Parametern a_1 und a_2 aufzutragen sind, so dass man hat

$$dS = a_1 a_2 \sin(a_1 a_2) dq_1 dq_2. \tag{1}$$

Die Strecken $a_1 dq_1$ und $a_2 dq_2$ kann man als die Bogendifferentiale der Coordinatenlinien (q_2) und (q_1) betrachten, die durch ihren Schnitt den Punkt M bestimmen. Bezeichnet man diese Bogen mit s_1 und s_2, so ist:

$$ds_1 = a_1 dq_1 \quad \text{und} \quad ds_2 = a_2 dq_2,$$

also

$$dE = ds_1 ds_2 \sin(ds_1 ds_2).$$

Ist E ein Volumen V und sind dessen Punkte durch die Coordinaten q_1, q_2, q_3 bestimmt, deren reciproke Parameter a_1, a_2, a_3 seien, so kann man für dE oder dV ein Parallelepipedon wählen, dessen drei in einem Eckpunkte zusammenstossende Kanten die Längen $a_1 dq_1$, $a_2 dq_2$, $a_3 dq_3$ haben und auf den Richtungen a_1, a_2, a_3 resp. aufzutragen sind.

Bezeichnet man ferner mit α_1, α_2, α_3 die Cosinus der Winkel $(a_2 a_3)$, $(a_3 a_1)$, $(a_1 a_2)$ und setzt (vergl. Kinematik Cap. VIII, S. 148)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

so ist:

$$dV = a_1 a_2 a_3 \Delta^{\frac{1}{2}} dq_1 dq_2 dq_3. \qquad (2)$$

Der Ausdruck $a_1 a_2 a_3 \Delta^{\frac{1}{2}}$ ist das Volumen des über den Parametern a_1, a_2, a_3 construirten Parallelepipedons.

Infolge der Beziehung zwischen dem reciproken und dem directen Parameter einer Punktfunction (s. Kinematik, S. 154, Formel (20)) hat man

$$a_i = \frac{1}{h_i}\sqrt{\frac{\Delta_{ii}}{\Delta}};$$

mithin ist

$$a_1 a_2 a_3 \Delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{22}\Delta_{33}}}{\Delta},$$

und dies geht mit Hilfe der Formeln auf Seite 152 der Kinematik in den Ausdruck

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3 \Delta'^{\frac{1}{2}}}$$

über, in welchem

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 1 \end{vmatrix}$$

die Determinante des complementären Systems der Axen h_1, h_2, h_3 bedeutet. Der Nenner jenes Ausdruckes ist das Volumen des über den directen Parametern h_1, h_2, h_3 construirten Parallelepipedons.

Setzt man zur Abkürzung

$$a_1 a_2 a_3 \Delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 \Delta'^{\frac{1}{2}}} = \omega, \qquad (3)$$

so ergiebt sich als allgemeine Formel für das Differentialelement eines Volumens:

$$dV = \omega\, dq_1 dq_2 dq_3.$$

Die Integrale

$$s = \int f(q)dq, \quad S = \int a_1 a_2 \sin(a_1 a_2) dq_1 dq_2, \quad V = \int \omega\, dq_1 dq_2 dq_3$$

repräsentiren resp. eine Linie, eine Fläche, ein Volumen, während die Integrale

$$m = \int \varrho f(q) dq, \quad m = \int \varrho a_1 a_2 \sin(a_1 a_2) dq_1 dq_2,$$
$$m = \int \varrho \omega dq_1 dq_2 dq_3$$

die zwischen denselben Grenzen wie jene zu nehmen sind, die entsprechenden Massen darstellen.

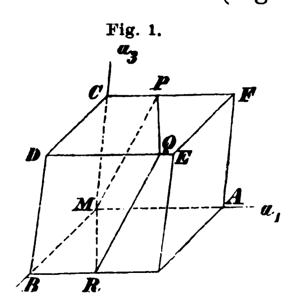
4. Wenn die Punkte einer Fläche S durch drei Coordinaten q_1, q_2, q_3 bestimmt sind, zwischen denen die Gleichung besteht

$$\varphi(q_1, q_2, q_3) = 0,$$

so kann man folgendermassen einen Ausdruck für das Element dS als Function zweier der drei Coordinaten q_1, q_2, q_3 erhalten.

Man denke sich in einem beliebig auf der Fläche S gewählten Punkte M (Fig. 1) das Differentialparallelepipedon (3) $AMCDE$, dessen Kanten $a_1 dq_1, a_2 dq_2, a_3 dq_3$ auf a_1, a_2, a_3 aufzutragen sind. Dieses Parallelepipedon ist ein Theil eines Prismas von unbestimmter Länge, dessen Basis $MBDC$ ist und dessen Kanten parallel MA verlaufen. Schneidet man dieses Prisma mit der Tangentenebene der Fläche S im Punkte M, so erhält man ein Parallelogramm $MPQR$, das man als Flächenelement dS wählen kann.

Fig. 1.



Bezeichnet nun n diejenige Richtung der Normale der Fläche S im Punkte M, welche mit dem reciproken Parameter a_1 einen spitzen Winkel (na_1) bildet, so ist $dS \cos(na_1)$ der Inhalt der Schnittfläche des Prismas mit einer zu a_1 senkrechten Ebene; folglich ist

$$dS \cos(na_1) \,.\, a_1 dq_1$$

das Volumen des Parallelepipedons dV, und man erhält nach Formel (3)

$$dS \cos(na_1) \,.\, a_1 dq_1 = \omega dq_1 dq_2 dq_3,$$

also

$$dS = \frac{\omega}{a_1 \cos(na_1)} dq_2 dq_3. \tag{4}$$

Auf ähnliche Weise kann man finden:

$$dS = \frac{\omega}{a_2 \cos(na_2)} dq_1 dq_3, \quad dS = \frac{\omega}{a_3 \cos(na_3)} dq_1 dq_2. \tag{5}$$

Bedeutet P den Differentialparameter der Function φ, welche die linke Seite der Gleichung $\varphi(q_1, q_2, q_3) = 0$ bildet, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = a_1 P \cos(Pa_1), \; \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = a_2 P \cos(Pa_2), \; \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} = a_3 P \cos(Pa_3),$$
$$\cos(na_1) = \pm \cos(Pa_1), \quad \cos(na_2) = \pm \cos(Pa_2),$$
$$\cos(na_3) = \pm \cos(Pa_3)$$

(vergl. Kinematik, Cap. VII u. XII). Dadurch nehmen die Ausdrücke (4) und (5) die Form an:

$$dS = \pm \frac{\omega P}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}} dq_2 dq_3, \; dS = \pm \frac{\omega P}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}} dq_1 dq_3, \; dS = \pm \frac{\omega P}{\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}} dq_1 dq_2. \quad (6)$$

Bei Anwendung einer dieser Formeln eliminirt man mit Hilfe der Gleichung $\varphi(q_1, q_2, q_3) = 0$ diejenige Coordinate, deren Differential in der betreffenden Formel nicht vorkommt.

Eine über eine Fläche S ausgedehnte Integration lässt sich auf eine Integration zurückführen, die sich über alle Punkte der Begrenzung s der Fläche S erstreckt; daher kann man eine in der Fläche S enthaltene Masse durch eine längs der Begrenzung der Fläche vertheilte Masse ersetzen. Ebenso lässt sich jede über ein gegebenes Volumen V ausgedehnte Integration auf eine Integration zurückführen, die sich über die ganze das Volumen begrenzende Oberfläche S erstreckt, und man kann daher die in dem gegebenen Volumen enthaltene Masse durch eine auf der Oberfläche des Volumens vertheilte Masse ersetzen.

5. *Allgemeine Formeln, um ein über eine Fläche ausgedehntes Integral auf ein über die Begrenzung dieser Fläche ausgedehntes Integral zurückzuführen.*

Es sei das Doppelintegral

$$\int\int f(q_1, q_2) dq_1 dq_2$$

gegeben, worin q_1 und q_2 die Coordinaten eines Punktes M sind, welcher auf der Fläche S liegt, über die sich die Integration erstreckt; dabei soll $f(q_1, q_2)$ für jeden Punkt der Fläche S einen endlichen bestimmten Werth haben.

Führen wir zunächst die Integration nach q_2 aus, wobei q_1 als constant betrachtet wird, d. h. nehmen wir die Summe

derjenigen Elemente $f(q_1, q_2)dq_2$, die sich auf die in der Coordinatenlinie (q_1) liegenden Punkte der Fläche S beziehen.

Denken wir uns nun, dass sich auf der Linie (q_1) ein Punkt in dem Sinne, wohin q_2 wächst, bewegt und dass M_1, $M_2, \ldots M_p$ die successiven Stellen des Eintritts und Austritts jenes Punktes aus der Fläche S bedeuten, und zwar mögen die ungeraden Indices die Eintrittspunkte, die geraden die Austrittspunkte bezeichnen. Man kann immer annehmen, dass die Anzahl der einen und der andern Punkte zusammen gerade ist;*) dabei sieht man im Falle einer Berührung zwischen der Linie (q_1) und der Begrenzung s der Fläche S den Berührungspunkt als einen doppelten, d. h. als einen Eintritts- und einen Austrittspunkt an. Die den Punkten $M_1, M_2, M_3, \ldots M_p$ entsprechenden Werthe der Coordinate q_2 sind die Grenzen des Integrals $\int f(q_1, q_2)dq_2$ und lassen sich mit Hilfe der Gleichungen der Linien, aus denen die ganze Begrenzung s der Fläche S zusammengesetzt ist, als Functionen von q_1 darstellen. Setzt man diese Grenzen als bekannt voraus, so findet man eine Function $F(q_1, q_2)$, die der Bedingung genügt:

$$\frac{\partial F(q_1, q_2)}{\partial q_2} = f(q_1, q_2);$$

in diese Function setzt man jene Grenzen für q_2 ein, wodurch man die Werthe der Function $F(q_1, q_2)$ in den Punkten M_1, $M_2, M_3, \ldots M_p$ erhält, die mit $F_1, F_2, \ldots F_p$ bezeichnet werden mögen. Man hat somit:

$$\int f(q_1, q_2)dq_2 = F_2 - F_1 + F_4 - F_3 + \cdots + F_p - F_{p-1};$$

folglich wird:

$$\int\!\!\int f(q_1, q_2)dq_1 dq_2 = \int(-F_1 + F_2 - F_3 + \cdots + F_p)dq_1.$$

Nun bleibt noch die Integration nach q_1 auszuführen; dieselbe muss sich auf alle den Punkten der Begrenzung der Fläche S zugehörigen Werthe der Coordinate q_1 erstrecken.

---

*) Es wird vorausgesetzt, dass die Linie (q_1) ebenso oft aus der Fläche S austritt, als sie in dieselbe eintritt. Wenn (q_1) nicht aus der Fläche austritt, oder in ihr anfängt, oder in ihr endet, so kann man die Fläche S in Theile zerlegen, die der geforderten Bedingung genügen, dann die Transformation auf jeden Theil besonders anwenden und die Summe der Resultate bilden.

Die verschiedenen hierdurch erhaltenen Ausdrücke, die den einzelnen Theilen der Begrenzung der Fläche S entsprechen, lassen sich in ein einziges über die ganze Begrenzung s ausgedehntes Integral vereinigen.

Es sei nämlich M ein beliebiger Punkt der Begrenzung s der Fläche S, ds die unendlich kleine Differentialverschiebung dieses Punktes auf der Begrenzung in dem Sinne, wohin q_1 wächst, und dq_1 das dieser Verschiebung entsprechende Differential der Coordinate q_1. Nach § 51, S. 106 der Kinematik ist

$$dq_1 = h_1 \cos(h_1 ds) ds,$$

wo h_1 der directe Differentialparameter der Coordinate q_1 ist und $(h_1 ds)$ der Winkel, den derselbe mit der Verschiebung ds bildet.

Man denke sich im Punkte M die Tangentenebene der Fläche S und in dieser Ebene die Normale n der Begrenzungscurve, und zwar im Sinne nach dem Austritt des Punktes M aus der Fläche S hin gerichtet; wir nennen n mit Rücksicht hierauf die *äussere Normale.* Da h_1 auf a_2 und n auf ds senkrecht steht, so ist

$$\cos(h_1 ds) = \pm \cos(n a_2),$$

wo das Zeichen $+$ den Eintrittspunkten und das Zeichen $-$ den Austrittspunkten entspricht; hiermit wird

$$dq_1 = \mp h_1 \cos(n a_2) ds.$$

Substituirt man diesen Werth von dq_1 in jedes Glied des Resultates der ersten Integration, d. h. in den Ausdruck

$$(-F_1 + F_2 - F_3 + \cdots + F_p) dq_1 = -F_1 dq_1 + F_2 dq_1 - \cdots + F_p dq_1,$$

so erhält man eine Summe von Gliedern von der allgemeinen Form

$$F(q_1, q_2) h_1 \cos(n a_2) ds.$$

Die Summe aller Werthe, welche diese Function für die Punkte der ganzen Begrenzung s der Fläche S annimmt, machen das vollständige Resultat der Integration nach der zweiten Coordinate q_1 aus. Es ist also

$$\int f(q_1, q_2) dq_1 dq_2 = \int F(q_1, q_2) h_1 \cos(n a_2) ds, \tag{7}$$

wo

$$f(q_1, q_2) = \frac{\partial F(q_1, q_2)}{\partial q_2}.$$

Durch Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen nach q_1 und q_2 findet man auch

$$\int f(q_1, q_2)\,dq_1\,dq_2 = \int \Phi(q_1, q_2)\,h_2 \cos(na_1)\,ds, \tag{8}$$

wo

$$f(q_1, q_2) = \frac{\partial \Phi(q_1, q_2)}{\partial q_1}.$$

Specielle Fälle. 1) Gesetzt die Fläche S sei eben und ihre Punkte seien durch geradlinige Coordinaten x und y in Bezug auf Axen bestimmt, die in dieser Ebene liegen und den Winkel ϑ einschliessen. In diesem Falle hat man in Formel (7) zu setzen: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $h_1 = \frac{1}{\sin\vartheta}$, $\cos(a_2 n) = \cos(yn)$; man erhält also aus jener Formel:

$$\int f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{\sin\vartheta}\int F(x, y)\cos(yn)\,ds, \tag{9}$$

mit

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Ebenso erhält man:

$$\int f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{\sin\vartheta}\int \Phi(x, y)\cos(xn)\,ds,$$

mit

$$f(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}.$$

Für rechtwinklige Axen hat man nur $\sin\vartheta = 1$ zu setzen.

2) Die Fläche S sei wieder eben, ihre Punkte aber durch Polarcoordinaten bestimmt, nämlich durch den aus dem Pole O gezogenen Radiusvector und durch den Winkel φ, welchen der Radiusvector mit einer gegebenen Axe bildet. Die Formel (7) giebt:

$$\int f(r, \varphi)\,dr\,d\varphi = \int F(r, \varphi)\,\frac{1}{r}\cos(rn)\,ds, \tag{10}$$

mit

$$f(r, \varphi) = \frac{\partial F(r, \varphi)}{\partial r}.$$

Bei Ableitung der Formel (7) wurde vorausgesetzt, dass der die Coordinatenlinie (q_1) beschreibende Punkt ebenso oft aus der Fläche S aus- wie in dieselbe eintritt; man darf daher die Formel (10) nur in dem Falle anwenden, dass der Pol O ausserhalb des Flächenraumes S liegt, d. h. wenn der Radiusvector ebenso oft aus S aus- wie eintritt.

Doch bleibt die Formel (10) auch für den Fall richtig, dass der Pol O innerhalb des Flächenraumes S oder auf dessen Begrenzung liegt, wenn man festsetzt, dass der Pol als erster Eintrittspunkt jedes Radiusvectors gelten soll. Betrachtet man nämlich φ als constant und integrirt nach r, so folgt

$$d\varphi \int f(r, \varphi) dr = (-F_1 + F_2 - F_3 + \cdots + F_p) d\varphi,$$

wo nun $F_1 = F(0, \varphi)$ ist. Setzt man hierauf $d\varphi = \mp \frac{1}{r} \cos(r\varphi) ds$, so bringt man dadurch alle Glieder des sich ergebenden Resultats auf die allgemeine Form:

$$F(r, \varphi) \frac{1}{r} \cos(r\varphi) ds.$$

Dabei muss man aber beim Integriren nach φ den Pol als einen der Begrenzung angehörenden Punkt betrachten und als den auf diesen Punkt bezüglichen Theil des Integrals $\int F(r, \varphi) \frac{1}{r} \cos(r\varphi) ds$ den Ausdruck

$$-\int F(0, \varphi) d\varphi \tag{11}$$

nehmen, wobei die Integration nach φ über alle Werthe dieser Variablen auszudehnen ist, die allen übrigen Punkten der Begrenzung entsprechen.

Liegt der Pol innerhalb des Flächenraums S, so sind die Grenzen des Integrals (11) 0 und 2π. Liegt der Pol O aber auf der Begrenzung, so sind die Grenzen die Werthe von φ, welche den äussersten Tangenten entsprechen, die man vom Punkte O aus an die Begrenzung s ziehen kann. Kann man durch O nur eine Tangente an die Begrenzung legen, so ist die Differenz der Grenzen π.

Aehnliche Bemerkungen gelten auch für die geodätischen Coordinaten auf einer krummen Fläche S (s. Kinematik S. 172), wenn die geodätischen Linien aus einem innerhalb der Fläche oder auf deren Begrenzung gelegenen Punkte ausgehen.

Sind die Punkte einer Fläche S' durch drei Coordinaten im Raume, q_1, q_2, q_3, bestimmt, so muss man mit Hilfe der Gleichung der Fläche eine Coordinate, z. B. q_3, eliminiren, dann die beiden übrigen als Coordinaten auf der Fläche betrachten und für sie die Differentialparameter nach den in der Kinematik (§ 51) gegebenen Regeln bestimmen.

6. *Allgemeine Formeln, um ein über ein Volumen ausgedehntes Integral auf ein über die ganze Oberfläche des Volumens ausgedehntes zurückzuführen.*

Es sei das dreifache Integral

$$\int f(q_1, q_2, q_3) dq_1 dq_2 dq_3 \tag{12}$$

gegeben, worin q_1, q_2, q_3 die Coordinaten eines Punktes des gegebenen Volumens V sind; $f(q_1, q_2, q_3)$ sei eine Function derselben, die für jeden Punkt des Volumens einen einzigen endlichen und bestimmten Werth hat; die Integration erstrecke sich über das ganze Volumen.

Wir führen zuerst die Integration nach q_3 aus, indem wir q_1 und q_2 als constant betrachten, d. h. wir bilden die Summe derjenigen Elemente des Integrals, welche zu den Punkten der Coordinatenlinie $(q_1 q_2)$ gehören. Um die Grenzen dieser Integration zu finden, denken wir uns, dass sich auf der Linie $(q_1 q_2)$ ein Punkt in dem Sinne bewege, wohin q_3 wächst. Wir nehmen an, dass dieser Punkt ebenso oft aus dem Volumen V aus- als eintritt*) und bezeichnen die successiven Eintritts- und Austrittspunkte mit M_1, M_2, M_3, ... M_p, so zwar, dass den Eintrittspunkten die ungeraden, den Austrittspunkten die geraden Indices entsprechen.

Ist $F(q_1, q_2, q_3)$ eine Function, die der Bedingung

$$\frac{\partial F(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} = f(q_1, q_2, q_3)$$

genügt, und sind F_1, F_2, ... F_p die Werthe dieser Function in den Punkten M_1, M_2, ... M_p, so ergiebt die Integration nach q_3 ein Resultat von der Form:

$$dq_1 dq_2 \int f(q_1, q_2, q_3) dq_3 =$$

$$-F_1 dq_1 dq_2 + F_2 dq_1 dq_2 - F_3 dq_1 dq_2 + \cdots + F_p dq_1 dq_2; \tag{13}$$

hier ist in jedem Gliede für die Coordinate q_3 derjenige Aus-

---

*) Wenn die Anzahl der Austrittspunkte der der Eintrittspunkte nicht gleich ist oder die ganze Linie $(q_1 q_2)$ in dem Volumen V eingeschlossen ist, so kann man das Volumen V in Theile zerlegen, für welche die geforderte Bedingung erfüllt ist, dann die beabsichtigte Transformation in jedem Theile einzeln vornehmen und endlich die Summe der den einzelnen Theilen entsprechenden Resultate bilden.

druck von q_3 als Function von q_1 und q_2 zu setzen, den man aus der Gleichung des Theils der Oberfläche des Volumens V erhält, in welchem der dem betreffenden Gliede entsprechende Punkt liegt. Nun ist dieser Ausdruck noch nach q_1 und q_2 zu integriren, wobei die Integration sich über alle Punkte der das Volumen V begrenzenden Fläche S zu erstrecken hat. Die verschiedenen durch diese Integration erhaltenen Resultate, die den einzelnen Theilen der Fläche S entsprechen, lassen sich in ein einziges über die ganze Oberfläche ausgedehntes Integral vereinigen.

Bezeichnet nämlich dS ein Flächenelement von zwei unendlich kleinen Dimensionen, so hat man nach Formel (5) § 4:

$$dq_1 dq_2 = \pm \frac{a_3 \cos(na_3) dS}{\omega};$$

dabei ist $\omega = a_1 a_2 a_3 \Delta^{\frac{1}{2}}$ und (na_3) bedeutet den Winkel, welchen der Parameter a_3 mit der äusseren Normale der Fläche S im Punkte $M(q_1, q_2, q_3)$ bildet, d. h. mit der Normale, die von dem Volumen V nach aussen hin gerichtet ist. Das negative Zeichen der Formel gilt für den Fall, dass M ein Eintrittspunkt des Parameters a_3 in das Volumen ist, das positive für den Fall eines Austrittspunktes. Beachtet man dies und substituirt den gefundenen Ausdruck für $dq_1 dq_2$ in die Formel (13), so nehmen alle Glieder derselben die allgemeine Form an:

$$\frac{1}{\omega} F(q_1, q_2, q_3) a_3 \cos(na_3) dS;$$

es muss also die Summe der Werthe, welche dieser Ausdruck für alle Punkte der ganzen Fläche S annimmt, dem Integrale (12) gleich sein. Man hat somit:

$$\int f(q_1, q_2, q_3) dq_1 dq_2 dq_3 = \int \frac{1}{\omega} F(q_1, q_2, q_3) a_3 \cos(na_3) dS, \quad (14)$$

wo

$$f(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial F(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3}.$$

Durch Aenderung der Reihenfolge der Integrationen nach q_1, q_2, q_3 ergeben sich zwei weitere Formeln von derselben Gestalt.

Specielle Fälle. 1) Für ein geradliniges Coordinatensystem der x, y, z hat man nach Formel (14):

$$\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{\omega}\int F(x, y, z) \cos(nz)\,dS, \qquad (15)$$

wo $f(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}$ und ω eine Constante ist. Im Falle rechtwinkliger Coordinaten wird $\omega = 1$.

2) Für ein System von Polarcoordinaten, nämlich den Radiusvector r, den Winkel φ, den derselbe mit einer festen Axe Oz bildet, und den Winkel ψ, den die Ebene des Winkels φ mit einer festen, durch die Axe gehenden Ebene einschliesst, erhält man:

$$\int f(r, \varphi, \psi)\,dr\,d\varphi\,d\psi = \int F(r, \varphi, \psi)\,\frac{\cos(nr)\,dS}{r^2 \sin\varphi}, \qquad (16)$$

wo

$$f(r, \varphi, \psi) = \frac{\partial F(r, \varphi, \psi)}{\partial r}.$$

Die Bedingungen, unter denen die Formel (14) abgeleitet wurde, forderten, dass die Coordinatenlinie $(q_1 q_2)$ in dem Volumen V weder beginne noch endige; wir dürfen daher die Formel (16) nur in dem Falle anwenden, dass der Coordinatenpol O ausserhalb des Volumens V liegt. Doch bleibt die Formel (16) auch in dem Falle, dass O innerhalb des Volumens V oder auf dessen Oberfläche liegt, richtig, wenn man den Pol als ersten Eintrittspunkt für alle Radienvectoren ansieht und den auf diesen Punkt bezüglichen Theil des Integrals in der Form darstellt:

$$-\int F(0, \varphi, \psi)\,d\varphi\,d\psi.$$

Liegt der Pol O innerhalb des Volumens V, so muss sich die Integration nach φ und ψ über alle Punkte der Oberfläche einer Kugel vom Mittelpunkt O und von einem Radius gleich 1 erstrecken. Liegt dagegen der Pol O auf der Oberfläche des Volumens und hat diese Fläche in diesem Punkte nur eine Tangentenebene, so erstreckt sich die Integration über die den Punkten einer Halbkugel entsprechenden Werthe von φ und ψ. Bildet endlich der Pol O die Spitze eines Kegels, der die Oberfläche des Volumens V berührt, so hat sich die Integration über den innerhalb dieses Kegels liegenden Theil der Kugeloberfläche zu erstrecken.

Bedeutet $d\sigma$ ein Element von zwei unendlich kleinen

Dimensionen auf einer Kugelfläche σ, deren Mittelpunkt der Pol O und deren Radius gleich 1 ist, und sind φ, ψ die Coordinaten eines diesem Elemente angehörigen Punktes, so ist

$$d\sigma = \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi;$$

hieraus ergiebt sich $d\varphi\, d\psi = \frac{d\sigma}{\sin\varphi}$. Führt man also in $\int f(r, \varphi, \psi) dr\, d\varphi\, d\psi$ die Integration nach r aus, so erhält man ein Resultat, das sich in folgender Form schreiben lässt:

$$\int f(r,\varphi,\psi) dr\, d\varphi\, d\psi = \int \frac{d\sigma}{\sin\varphi} \int f(r,\varphi,\psi) dr = \int \frac{F(r, \varphi, \psi)\, d\sigma}{\sin\varphi}; \quad (17)$$

dabei erstreckt sich die Integration nach $d\sigma$ über die ganze Kugel σ, wenn der Pol O innerhalb des Volumens liegt; wenn aber O ausserhalb des Volumens oder auf dessen Oberfläche S liegt, so erstreckt sich die Integration nur auf den Theil der Kugel, der alle Schnittpunkte der Kugel mit den aus O nach allen Punkten der Fläche S gezognen Radienvectoren enthält. Dieser Theil ist eine Halbkugel, wenn alle durch O gehenden äussersten Tangenten an S in einer Ebene liegen.

Es sei noch bemerkt, dass man $d\sigma$ als Centralprojection des Oberflächenelements dS auf die Kugel vom Radius 1, deren Mittelpunkt O ist, oder als Perspective von dS für O als Augenpunkt betrachten kann; dabei ist $dS \cos(nr) = r^2 d\sigma$, so dass die Formel (17) wieder in (16) übergeht.

7. Das Integral

$$\int f(q_1, q_2) dq_1\, dq_2$$

(§ 5) lässt sich als eine über die Fläche S vertheilte Masse ansehen, deren Dichtigkeit in jedem Punkte gleich

$$\varrho = \frac{f(q_1, q_2) dq_1\, dq_2}{dS} = \frac{f(q_1, q_2)}{a_1 a_2 \sin(a_1 a_2)}$$

ist. Diese Masse lässt sich nach Formel (7) durch eine über die Begrenzung s der Fläche S vertheilte Masse, deren Dichtigkeit in jedem Punkte der Begrenzung gleich

$$F(q_1, q_2) h_1 \cos(n a_2)$$

ist, ersetzen.

Die Formel (8) liefert eine andere Vertheilung derselben Masse über die Begrenzung.

Ebenso repräsentirt das Integral

$$\int f(q_1, q_2, q_3) dq_1 dq_2 dq_3$$

(§ 6) die Masse eines Volumens V; ihre Dichtigkeit ist in jedem Punkte des Volumens:

$$\varrho = \frac{1}{\omega} f(q_1, q_2, q_3),$$

wo $\omega = a_1 a_2 a_3 \Delta^{\frac{1}{2}}$. Nach Formel (14) lässt sich diese Masse über die ganze Oberfläche S des Volumens V derart vertheilen, dass ihre Dichtigkeit in jedem Punkte gleich

$$\frac{1}{\omega} F(q_1, q_2, q_3) a_3 \cos (n a_3)$$

ist.

8. Man kann jede Masse m von gegebener Grösse auf verschiedene Weise über eine gegebene Raumgrösse E von einer, zwei oder drei Dimensionen vertheilen. Die Vertheilungsart hängt von der Form der Punktfunction, die die Dichtigkeit ϱ darstellt, ab. Im Allgemeinen lässt sich eine gegebene Masse m derart über einen gegebenen Raum E vertheilen, dass die Dichtigkeit ϱ einer gegebenen Punktfunction φ, multiplicirt mit einer gewissen Constanten, gleich wird. Die Bedingung der Aufgabe fordert nämlich, dass

$$m = \lambda \int \varphi dE$$

sei, woraus sich

$$\lambda = \frac{m}{\int \varphi dE}$$

ergiebt; diese Grösse ist aber endlich, solange das Integral $\int \varphi dE$ nicht gleich Null ist.

Man kann ferner eine gegebene Masse m immer derart über einen Raum E vertheilen, dass die Dichtigkeit in jedem Punkte constant, d. h. dass die Masse homogen ist. Diese constante Dichtigkeit ist $\frac{m}{E}$, das Verhältniss der Masse zu dem Raume. War die Masse m in nicht homogener Weise über den Raum E vertheilt und ist die Dichtigkeit dieser Vertheilung in jedem Punkte durch die Function ϱ dargestellt, so *ist die Dichtigkeit* $\frac{m}{E}$ *der homogenen Vertheilung das arithmetische Mittel aus allen, den einzelnen Punkten des Raumes* E *entsprechenden Werthen der Function* ϱ. Hiervon kann man sich

folgendermassen überzeugen. Man theile E in gleiche, unendlich kleine Theile α, deren Anzahl n sein mag, und bezeichne die entsprechenden Massentheilchen mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ und die Verhältnisse $\frac{\mu_1}{\alpha}, \frac{\mu_2}{\alpha}, \ldots \frac{\mu_n}{\alpha}$ mit $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$. Dann ist

$$E = n\alpha \text{ und } m = (\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots \varrho_n)\,\alpha = \alpha\,\Sigma_n\,\varrho_i;$$

folglich ist

$$\frac{m}{E} = \frac{1}{n}\,\Sigma_n\,\varrho_i,$$

d. h. die Dichtigkeit der gleichförmigen Vertheilung der ganzen Masse m ist das arithmetische Mittel aus den Dichtigkeiten der gleichförmigen Vertheilungen der Massen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ in Räumen gleich α. Diese Grösse hängt aber von der Anzahl n nicht ab. Für $n = \infty$ geht die Summe $\Sigma_n\,\varrho_i$ in die Summe aller den Punkten des Raumes E entsprechenden Werthe der Function ϱ über. Da $m = \int \varrho\, dE$ ist, so lässt sich jener Mittelwerth der Function ϱ in der Form darstellen:

$$\frac{1}{E}\int \varrho\, dE. \qquad (18)$$

Um also den arithmetischen Mittelwerth einer einem gegebenen Raume angehörigen Punktfunction zu erhalten, hat man das Integral dieser Function, das sich über den ganzen Raum erstreckt, durch die Grösse des Raumes zu dividiren.

Es seien nun m und m' zwei über denselben Raum E vertheilte Massen, ϱ und ϱ' ihre Dichtigkeiten in einem und demselben Punkte dieses Raumes und q das Verhältniss $\frac{\varrho'}{\varrho}$. Dann ist:

$$m' = \int \varrho'\, dE = \int q\varrho\, dE = \int q\, dm, \quad m = \int \varrho\, dm.$$

Das Verhältniss der Massen

$$\frac{m'}{m} = \frac{1}{m}\int q\, dm \qquad (19)$$

ist gleich dem Verhältniss $\frac{m'}{E} : \frac{m}{E}$ der Mittelwerthe der Dichtigkeiten ϱ' und ϱ und stellt das Mittel aus allen Werthen dar, die die Function $q = \frac{\varrho'}{\varrho}$ für die verschiedenen Elemente der Masse m annimmt.

Ein Integral von der Form

$$\int q\,dm$$

nennt man das über die ganze Masse m ausgedehnte Integral der Function q.

9. Der Begriff des arithmetischen Mittels lässt sich dadurch verallgemeinern, dass man die algebraische Summe der Grössen, getheilt durch die Anzahl der Summanden, durch die geometrische Summe, getheilt durch die Zahl der Summanden, ersetzt.

Es seien $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots \overline{u}_n$ nach Richtung und Grösse gegebene gerade Strecken und

$$\overline{s} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \cdots + \overline{u}_n \tag{20}$$

ihre geometrische Summe. Theilt man die Strecke $\overline{s}$ in n Theile, so kann man einen solchen Theil $\frac{1}{n}\overline{s}$, in demselben Sinne wie $\overline{s}$ auf $\overline{s}$ aufgetragen, als einen gewissen Mittelwerth nach Grösse und Richtung aus den geometrischen Summanden $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots \overline{u}_n$ ansehen. Wir werden diese Grösse den *mittleren geometrischen Summanden* nennen.

Die Anzahl n der Glieder der Summe $\overline{s}$ kann unendlich gross sein, und die Summanden $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots$ können eine Reihe von Werthen einer und derselben geometrischen Grösse $\overline{u}$ sein, deren Länge und Richtung von dem Ort eines Punktes M, der einem gegebenen Raume E angehört, abhängt. In diesem Falle ist der Grenzwerth von $\frac{1}{n}\overline{s}$ durch $\frac{1}{E}\overline{\int} \overline{u}dE$ dargestellt, wo das Zeichen $\overline{\int}$ die Grenze einer geometrischen Summe bedeutet, die man ein *geometrisches Integral* nennen kann. Wenn man nämlich E in n gleiche Theile α theilt und auf den Richtungen $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots \overline{u}_n$ die Strecken $\alpha\overline{u}_1, \alpha\overline{u}_2, \ldots \alpha\overline{u}_n$ abträgt, so wird:

$$\frac{1}{n}\overline{s} = \frac{\Sigma\alpha\overline{u}_i}{E},$$

und dies geht für $n = \infty$ in $\frac{1}{E}\overline{\int}\overline{u}dE$ über, wo $\overline{u}dE$ eine auf der Richtung von $\overline{u}$ aufgetragene unendlich kleine Strecke von derselben Ordnung wie dE bedeutet. Die geometrische Grösse

$\bar{u}$ kann z. B. den aus einem gegebenen Pole nach einem beliebigen Punkte des Raumes E gezogenen Radiusvector darstellen, oder auch die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung dieses Punktes.

Statt des Raumes E kann man auch seine Masse m, deren Dichtigkeit ϱ sei, betrachten: dann ist $\frac{1}{m}\int \bar{u}\,dm$ das Mittel aus den den Elementen der Masse m entsprechenden Werthe von $\bar{u}$; dieser Mittelwerth ist das Verhältniss des mittleren geometrischen Summanden aus allen Werthen $\bar{u}\varrho$ zu dem arithmetischen Mittelwerthe der Dichtigkeit ϱ.

10. Gesetzt, $\bar{u}$ sei der Radiusvector, welcher den Pol O mit einem dem Elemente dm angehörigen Punkte verbindet; die Dimensionen des Elementes dm seien alle unendlich klein, und es sei

$$\bar{r} = \frac{1}{m}\int \bar{u}\,dm.$$

Es lässt sich leicht beweisen, dass, wenn man diese Länge als Radiusvector OC darstellt, die Lage des durch diesen Radiusvector bestimmten Punktes C nicht von der Lage des Pols abhängt, sondern nur von der Masse m und von der Art ihrer Vertheilung in dem Raume E. Vertauscht man nämlich den Pol O mit einem andern O' und setzt $\overline{OO'} = \bar{\delta}$, so ist $\bar{u} + \bar{\delta}$ der neue Radiusvector des Elements dm, und

$$\frac{1}{m}\int (\bar{u} + \bar{\delta})dm = \bar{\delta} + \frac{1}{m}\int \bar{u}\,dm = \bar{\delta} + \bar{r}$$

ist der mittlere geometrische Summand für O' als Pol; nun ist aber $\bar{\delta} + \bar{r} = \overline{O'C}$; also hat der Punkt C seine Lage nicht geändert.

Der von der Lage des Pols unabhängige Punkt C hat daher die Eigenschaft, dass sein Abstand von jedem Punkte O der mittlere geometrische Summand aus den Abständen der Elemente der Masse m von jenem Punkte ist; man nennt daher C den Mittelpunkt der mittleren Entfernungen. Wir werden diesen Punkt einfach *Massenmittelpunkt* nennen. In der Folge wird sich zeigen, aus welchem Grunde man densel-

ben auch *Trägheitsmittelpunkt* und *Schwerpunkt der Masse m* nennt.*)

Die auf der Richtung des Radiusvectors $\overline{u}$ aufgetragene Strecke $\overline{u}dm$ werden wir das *polare Moment ersten Grades* des Elements dm bezüglich des Pols O nennen und die auf der Richtung $\overline{OC}$ aufgetragene Strecke

$$\overline{r}m = \int \overline{u}dm,$$

die gleich der geometrischen Summe aller jener Momente ist, *das Moment der ganzen in ihrem Mittelpunkte C concentrirten Masse.*

Es seien $r, r', r'', \ldots$ Radienvectoren, die aus dem Pole O nach den Mittelpunkten der Massen $m, m', m'', \ldots$ führen, und $\overline{R}$ der mittlere geometrische Summand der Radienvectoren $\overline{u}$, die den Elementen dm der Masse m, den Elementen dm' der Masse m', u. s. w. zugehören. Man hat dann

$$\overline{r}m = \int \overline{u}dm, \quad \overline{r}'m' = \int \overline{u}dm', \quad \overline{r}''m'' = \int \overline{u}dm'', \ldots .$$

und

$$\overline{R}(m + m' + m'' + \ldots) = \int \overline{u}dm + \int \overline{u}dm' + \int \overline{u}dm'' + \ldots;$$

folglich ist

$$\overline{R}(m + m' + m'' + \ldots) = \overline{r}m + \overline{r}'m' + \overline{r}''m'' + \ldots, \qquad (21)$$

oder

$$\overline{R} = \frac{\overline{r}m + \overline{r}'m' + \overline{r}''m'' + \ldots.}{m + m' + m'' + \ldots} = \frac{\Sigma m\overline{r}}{\Sigma m},$$

(dabei können unter den Massen $m, m', \ldots$ auch negative sein; ist z. B. m negativ, so hat man für das polare Moment $m\overline{r}$ die dem $\overline{r}$ entgegengesetzte Richtung zu nehmen) d. h.: *Der Radiusvector des Mittelpunkts eines Massensystems ist gleich der geometrischen Summe der polaren Momente ersten Grades aller in ihren betreffenden Mittelpunkten concentrirten Massen, dividirt durch die Summe aller Massen.*

---

*) Diese von dem Begriffe der Momente bezüglich einer Ebene unabhängige Auffassung des Schwerpunkts scheint von Barré de St. Venant herzurühren. S. Principes de mécanique fondés sur la cinématique, p. 37 (lithogr.).

Man sieht ferner leicht, dass *die geometrische Summe aller polaren Momente ersten Grades bezüglich eines im Mittelpunkte der ganzen Masse gewählten Poles gleich Null ist.* Aus Gleichung (21) folgt nämlich:

$$(\overline{r} - \overline{R})\, m + (\overline{r'} - \overline{R})\, m' + (\overline{r''} - \overline{R})\, m'' + \cdots = 0,$$

wo $\overline{r} - \overline{R}, \overline{r'} - \overline{R}, \overline{r''} - \overline{R}, \ldots$ die Abstände der Mittelpunkte der Massen $m, m', m'' \ldots$ von dem Mittelpunkt der ganzen Masse $m + m' + m'' + \cdots$ sind.

11. Wir lassen hier ein bemerkenswerthes Beispiel für die Bestimmung des Mittelpunktes einer linearen Masse folgen.

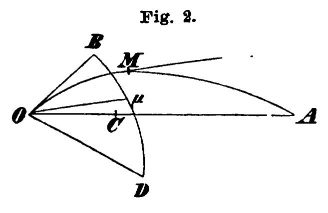


Fig. 2.

Es sei OMA (Fig. 2) der in der Zeit A vom Punkte M auf einer beliebigen Trajectorie mit der constanten oder variablen Geschwindigkeit $\overline{v}$ durchlaufene Weg, $B\mu D$ der Hodograph der Geschwindigkeit, $\overline{OB}$ und $\overline{OD}$ diejenigen Radienvectoren desselben, welche die Geschwindigkeit im Anfang und am Ende der Zeit t darstellen, und $\overline{O\mu}$ der einer beliebigen Geschwindigkeit $\overline{v}$ gleiche Radiusvector. Ist nun $OC = \frac{OA}{t}$ die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung auf der Sehne OA, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt die Sehne OA in der Zeit t gleichförmig durchlaufen würde, so ist C der Mittelpunkt einer der Zeit t gleichen Masse, die über den Bogen BD des Hodographen derart vertheilt ist, dass die Dichtigkeit in jedem Punkte μ der Beschleunigung v_1 erster Ordnung bei der Bewegung des Punktes M umgekehrt proportional ist.

Bezeichnet man nämlich mit σ den Bogen $B\mu$, so ist $d\sigma = v_1\, dt$; folglich ist $dt = \frac{1}{v_1}\, d\sigma$ das Element einer über den Bogen BD derart vertheilten Masse t, dass deren Dichtigkeit in jedem Punkte μ gleich $\frac{1}{v_1}$ ist. Das Moment ersten Grades dieses Elements bezüglich des Pols O ist $\overline{v}dt$, und daher ist der Abstand des Mittelpunkts der Masse t von dem Punkte O gleich

$$\frac{1}{t}\int \overline{v}dt;$$

das geometrische Integral $\int \overline{v}dt$, d. h. die geometrische Summe der Elemente des Bogens OMA, ist die Sehne $\overline{OA}$; folglich ist:

$$\frac{1}{t}\int \overline{v}dt = \frac{\overline{OA}}{t} = OC.$$

Gesetzt, die Bewegung des Punktes M sei gleichförmig und $v = 1$; dann ist der Hodograph BD eine sphärische Curve auf einer Kugel vom Radius 1, deren Mittelpunkt O ist. Bezeichnet ϱ den Radius der ersten Krümmung der Curve OMA im Punkte M, so ist $v_1 = \frac{1}{\varrho}$ und, wenn man den Bogen $OMA = s$ setzt, $OC = \frac{OA}{s}$. Wenn man also eine Masse gleich der Bogenlänge s einer beliebigen Curve über den Bogen derjenigen Curve vertheilt, welche alle Schnittpunkte einer Kugel vom Radius 1 mit den aus dem Kugelmittelpunkt gezogenen Parallelen zu den Tangenten der gegebenen Curve in den einzelnen Punkten des Bogens s enthält, und wenn die Dichtigkeit der Masse auf jenem Bogen dem Radius der ersten Krümmung der gegebenen Curve gleich ist, so ist der Abstand des Mittelpunkts dieser Masse von dem Anfangspunkt des Bogens gleich dem Verhältniss der Sehne des gegebenen Bogens s zu der Länge dieses Bogens.

Ist die Sehne $OA = 0$, d. h. ist der Bogen geschlossen, so wird $OC = 0$, d. h. der Mittelpunkt einer über den Hodographen vertheilten Masse gleich s fällt in den Anfangspunkt O des Bogens.

B. Methoden zur Bestimmung von Massenmittelpunkten.

12. Es seien $M, M', M'', \ldots$ die Mittelpunkte der Massen $m, m', m'', \ldots$; $\overline{r}, \overline{r'}, \overline{r''}, \ldots$ die Radienvectoren jener Punkte aus dem Pole O; C der Mittelpunkt des ganzen Massensystems $m, m', m'', \ldots$; $\overline{OC} = \overline{R}$ dessen Radiusvector; $x, x', x'', \ldots \alpha$ die Projectionen der Radienvectoren $\overline{r}, \overline{r'}, \overline{r''}, \ldots \overline{R}$ auf eine beliebige Axe Ox. Nach der Eigenschaft der Projection einer geometrischen Summe hat man dann auf Grund der Gl. (21) § 10:

$$R \cos(Rx) \cdot \Sigma m = \Sigma m r \cos(rx),$$

d. h.

$$\alpha \Sigma m = \Sigma m x. \tag{1}$$

Die Projectionen $x, x', x'', \ldots \alpha$ kann man betrachten als die Abstände der Punkte $M, M', M'', \ldots C$ von einer Ebene P, die man sich durch den Pol O senkrecht zur Axe Ox gelegt denkt; dabei hat man denselben das positive oder negative Zeichen zu geben, je nachdem die entsprechenden Punkte bezüglich der Ebene P auf der Seite liegen, nach der die Axe Ox hingerichtet ist oder nach der entgegengesetzten.

Das Product einer Masse in den Abstand ihres Mittelpunktes von einer gegebenen Ebene heisst *das Moment ersten Grades der Masse bezüglich der Ebene.*

Die Formel (1) zeigt, dass *die algebraische Summe der Momente ersten Grades eines Massensystems bezüglich einer gegebenen Ebene gleich ist dem Momente der im Mittelpunkte des ganzen Massensystems concentrirten Summe aller Massen;* daher *ist der Abstand des Mittelpunktes des ganzen Systems von der gegebenen Ebene das arithmetische Mittel aus den Abständen der Differentialelemente aller das System bildenden Massen.*

Liegt der Pol O in dem Mittelpunkte C des Massensystems, so ist $R = 0$, also auch $\alpha = 0$, und die Formel (1) giebt $\Sigma m x = 0$, d. h. *die Summe der Momente eines Massensystems bezüglich jeder durch den Massenmittelpunkt des Systems gehenden Ebene ist gleich Null.* Umgekehrt: *wenn die Summe der Momente eines Massensystems bezüglich einer gegebenen Ebene gleich Null ist, so geht diese Ebene durch den Massenmittelpunkt des Systems.* Denn wendet man auf diese Ebene die Formel (1) an, so findet man, dass $\alpha = 0$ ist.

Statt der Perpendikel $x, x', x'', \ldots \alpha$ zur Ebene P kann man in der Formel (1) auch gegen P geneigte Gerade nehmen, die parallel einer Geraden l von den Punkten $M, M', M'', \ldots C$ bis an die Ebene P gezogen werden. Bezeichnet nämlich ϑ den Winkel, welchen die Gerade l mit der zu P senkrechten Axe Ox bildet, und sind $x, x', x'', \ldots \alpha$ die von den Punkten $M, M', M'', \ldots C$ parallel zu l nach der Ebene P gezogenen Strecken, die mit dem positiven oder negativen Zeichen zu versehen sind, je nachdem die entsprechenden Punkte auf

der Seite der Ebene P liegen, wohin Ox gerichtet ist, oder auf der entgegengesetzten, so sind

$$x \cos \vartheta,\ x' \cos \vartheta,\ x'' \cos \vartheta, \ldots \alpha \cos \vartheta$$

die von den Punkten $M, M', M'', \ldots C$ auf die Ebene P gefällten Perpendikel, deren Vorzeichen mit denen von x, x', x'', $\ldots \alpha$ übereinstimmen. Entsprechend der Formel (1) ist dann

$$\alpha \cos \vartheta \cdot \Sigma m = \Sigma m x \cos \vartheta,$$

also wenn man mit $\cos \vartheta$ dividirt:

$$\alpha \Sigma m = \Sigma m x.$$

Die Grösse mx nennt man das schiefwinklige Moment bezüglich der Ebene P; die obigen Sätze über die Summe der rechtwinkligen Momente gelten offenbar auch für die schiefwinkligen.

13. Wenn eine continuirliche Masse m in Differentialelemente von drei unendlich kleinen Dimensionen getheilt ist und wenn x den rechtwinkligen oder schiefwinkligen Abstand eines solchen Elementes dm von einer Ebene P bezeichnet, so ist das über die ganze Masse m ausgedehnte Integral $\int x\,dm$ die Summe der Momente aller Differentialelemente der Masse m bezüglich der Ebene P. Bezeichnet man also mit α den Abstand des Mittelpunktes dieser Masse von der Ebene P, so ist:

$$m\alpha = \int x\,dm. \tag{2}$$

Wählt man für dm ein Differentialelement von zwei oder von einer unendlich kleinen Dimension, so muss man in der Formel (2) für x den Abstand des Mittelpunktes dieses Elementes von der Ebene P setzen.

Bedeuten x, y, z die geradlinigen Coordinaten des Mittelpunktes einer Masse m und α, β, γ die des Mittelpunktes eines ganzen Systems von Massen $m, m', m'' \ldots$, so ist nach Formel (1):

$$\alpha = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m},\ \beta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m},\ \gamma = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}. \tag{3}$$

Sind ferner x, y, z die Coordinaten des Massenmittelpunkts des Elementes dm einer continuirlichen Masse m und α, β, γ, die Mittelpunktscoordinaten der ganzen Masse, so ist nach Formel (2):

$$\alpha = \frac{1}{m}\int x\,dm, \quad \beta = \frac{1}{m}\int y\,dm, \quad \gamma = \frac{1}{m}\int z\,dm. \tag{4}$$

Aus den Formeln (1) und (2) ergeben sich die folgenden Sätze:

Lehrsatz I. Wenn die Mittelpunkte der einzelnen Massen eines Massensystems in einer und derselben Ebene liegen, so liegt auch der Mittelpunkt des ganzen Systems in dieser Ebene. Denn wenn man die Formel (1) oder (2) auf diese Ebene anwendet, so ergiebt sich für jede Masse $x = 0$, also auch $\alpha = 0$.

Folgerung. Der Mittelpunkt einer irgendwie über eine Ebene vertheilten Masse liegt in dieser Ebene.

Lehrsatz II. Liegen die Mittelpunkte mehrerer Massen auf einer geraden Linie, so liegt auch der Mittelpunkt des Systems dieser Massen auf jener Geraden. Denn nach Lehrsatz I liegt dieser Mittelpunkt in jeder durch diese Gerade gehenden Ebene.

Folgerung. Der Mittelpunkt einer continuirlichen geradlinigen Masse liegt auf der Geraden, über welche die Masse vertheilt ist.

Lehrsatz III. Wenn ein System aus paarweise gleichen Massen besteht, deren Mittelpunkte auf entgegengesetzten Seiten einer gegebenen Ebene, aber in gleichen Abständen von ihr liegen, so fällt der Mittelpunkt des ganzen Systems in diese Ebene. Denn die Momente der Massen bezüglich der gegebenen Ebene sind paarweise gleich und entgegengesetzt, so dass die Formel (1) $\Sigma mx = 0$, also $\alpha = 0$ ergiebt.

Haben zwei Ebenen diese Eigenschaft, so geht ihre Schnittlinie durch den Mittelpunkt des ganzen Systems. Sind drei solche Ebenen vorhanden, so schneiden sie sich im Mittelpunkte des ganzen Systems.

Folgerungen. Ist eine homogene Masse von einer Fläche begrenzt, die einen geometrischen Mittelpunkt hat, so fällt der Massenmittelpunkt mit dem geometrischen Centrum zusammen; z. B. der Massenmittelpunkt eines homogenen Ellipsoids fällt mit dem Centrum seiner Oberfläche zusammen; der Massenmittelpunkt eines homogenen Parallelepipedons liegt im Schnittpunkt der Diagonalen; der Massenmittelpunkt eines homogenen regelmässigen Polyeders liegt im Centrum der dem Polyeder einbeschriebenen Kugel. Mit Rücksicht auf die Lehrsätze I

und III folgt ferner, dass der Mittelpunkt einer homogenen, über eine Ebene derart vertheilten Masse, dass die Figur der Masse einen geometrischen Mittelpunkt hat, mit diesem Punkte zusammenfällt. Daher liegt der Mittelpunkt einer homogenen, über die Fläche oder längs des Perimeters einer Ellipse vertheilten Masse im Centrum derselben; der Mittelpunkt einer homogenen, über die Fläche oder längs des Perimeters eines Parallelogramms vertheilten Masse liegt im Schnittpunkt der Diagonalen; der Mittelpunkt einer homogenen, über die Fläche oder längs des Perimeters eines regelmässigen Polygons vertheilten Masse liegt im Centrum des dem Polygon einbeschriebenen Kreises.

Lehrsatz IV. Der Mittelpunkt zweier Massen liegt auf der geraden Verbindungslinie der Mittelpunkte der einzelnen Massen und theilt deren Abstand im umgekehrten Verhältniss der Massen.

Es sei M der Mittelpunkt der Masse m, M' der von m' und C der des Systems $m + m'$. Nach Lehrsatz II müssen die drei Punkte M, M', C in einer Geraden liegen. Sind die Massen m und m' beide positiv, so ist nach Formel (1):

$$MC = \frac{MM'.\,m'}{m + m'}, \quad M'C = \frac{MM'.\,m}{m + m'};$$

hieraus folgt:

$$MC : M'C = m' : m \text{ und } MC + M'C = MM'.$$

Ist m positiv und m' negativ, dabei aber $m > -m'$, so ist nach Formel (1):

$$MC = \frac{-MM'.\,m'}{m + m'}, \quad M'C = \frac{MM'.\,m}{m + m'};$$

daher:

$$MC : M'C = -m' : m \text{ und } M'C - MC = MM'.$$

In beiden Fällen sind die Abstände MC und $M'C$ den Absolutwerthen der Massen m und m' umgekehrt proportional. Im ersten Falle zeigt die Gleichung $MC + M'C = MM'$, dass der Punkt C zwischen M und M' liegt, während im zweiten die Gleichung $M'C - MC = MM'$ beweist, dass der Punkt M zwischen C und M' liegt, d. h. dass der Mittelpunkt der grösseren Masse zwischen dem Mittelpunkte der kleineren und dem ihrer Differenz $m + m'$ gelegen ist.

Folgerung 1. Sind die Massen m und m' positiv und gleich, so ist C die Mitte der Strecke MM'; ist aber $m = -m'$, so ist $MC = \infty$; der Mittelpunkt zweier gleichen Massen von entgegengesetztem Vorzeichen liegt im Unendlichen. Ueberhaupt sieht man aus Formel (1), dass $\alpha = \infty$ wird, wenn $\Sigma m = 0$ ist.

Folgerung 2. Denken wir uns das System der Massen $m, m', m'', \ldots$ in zwei Gruppen a und b getheilt, so dass $a + b = m + m' + m'' + \cdots$; es sei A der Massenmittelpunkt der Gruppe a, B der der Gruppe b, endlich C der des ganzen Systems $m, m', m'', \ldots$ Nach Lehrsatz IV muss C auf der Geraden AB liegen und $AC : BC = b : a$ sein. Theilt man nun das System $m, m', m'', \ldots$ auf andere Weise in zwei Gruppen a' und b', deren Mittelpunkte A' und B' heissen mögen, so muss die Gerade $A'B'$ ebenfalls durch den Punkt C gehen. Die Bemerkung führt zuweilen zu einer einfachen graphischen Construction für den Punkt C.

14. *Beispiele.* 1) *Mittelpunkt eines Systems von drei Massen, deren einzelne Mittelpunkte nicht in einer Geraden liegen.*

Es seien a, b, c die drei Massen, deren Mittelpunkte A, B, C die Ecken eines Dreiecks ABC (Fig. 3) bilden; wir vereinigen diese Massen zu je zweien, und es sei A' der Mittelpunkt der Masse $b + c$, B' der von $c + a$ und C' der von $a + b$. Diese drei Punkte müssen resp. auf den Seiten BC, CA, AB liegen, und die Geraden AA', BB', CC' müssen sich in dem Mittelpunkte O aller drei Massen a, b, c schneiden.

Fig. 3.

Zur Bestimmung der Abschnitte, welche die Punkte A', B', C' auf den Seiten BC, CA, AB bilden, hat man die Bedingungen:

$$A'B : A'C = c : b, \quad B'C : B'A = a : c, \quad C'A : C'B = b : a, \qquad (a)$$

aus denen sich der bekannte Satz des italienischen Geometers Ceva ergiebt:

$$A'B \,.\, B'C \,.\, C'A = A'C \,.\, B'A \,.\, C'B.$$

Specielle Fälle. a) Sind die Massen a, b, c positiv und einander gleich, so sind A', B', C' die Mitten der Seiten BC, CA, AB; also *liegt der Mittelpunkt von drei gleichen positiven, in den Ecken eines Dreiecks concentrirten Massen im Schnittpunkte der Verbindungslinien der Ecken mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten.*

b) Die Massen a, b, c seien den Seiten BC, CA, AB proportional, d. h. sei:

$$a : b : c = BC : CA : AB;$$

dann geben die Proportionen (*a*):

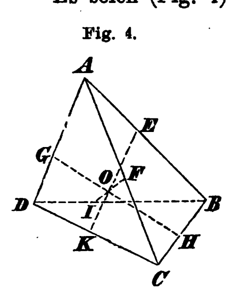
$A'B : A'C = AB : AC$, $B'C : B'A = BC : BA$, $C'A : C'B = CA : CB$;

die Geraden AA', BB', CC' halbiren daher die Winkel A, B, C; in diesem Falle liegt also der Mittelpunkt des Systems der Massen a, b, c im Centrum des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises.

2) *Mittelpunkt eines Systems von vier Massen, deren Mittelpunkte die Ecken eines ebenen oder windschiefen Vierecks sind.*

Es seien (Fig. 4) a, b, c, d die Massen, welche das System bilden, und A, B, C, D die Ecken des ebenen Vierecks oder des Tetraeders, welches die Mittelpunkte jener Massen bilden. Vereinigt man die Massen zu zweien, bestimmt nach Lehrsatz IV die Mittelpunkte E, F, G, H, I, K der Paare $a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$, $c + d$ und zieht die Geraden EK; FI, GH, so müssen dieselben durch einen und denselben Punkt O gehen, welcher der Mittelpunkt des ganzen Systems $a + b + c + d$ ist.

Fig. 4.



Specialfälle. a) Sind die Massen a, b, c, d gleich, so sind die Punkte E, F, G, H, I, K die Mitten der Kanten

$$AB, AC, AD, BC, BD, CD;$$

d. h.: *Der Mittelpunkt eines Systems von vier gleichen Massen, deren Mittelpunkte die Ecken eines Vierecks sind, liegt im Schnittpunkte der Verbindungslinien der Mitten der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks. Dabei halbiren sich diese drei Geraden, wie leicht zu sehen, in ihrem Schnittpunkte.* Ist das Viereck $ABCD$ ein windschiefes, so sind A, B, C, D Tetraederecken, und der Mittelpunkt der vier gleichen Massen ist der Schnittpunkt der Verbindungslinien der Mitten der Gegenkanten.

b) Es seien die Massen a, b, c, d den Flächeninhalten der gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ proportional, und zwar:

$$a : b : c : d = BCD : CDA : DAB : ABC.$$

Dann muss der Mittelpunkt E der Masse $a + b$ der Bedingung

$$AE : BE = CDA : BCD$$

genügen. Bedeuten nun α und β die Abstände der Punkte A und B von der Ebene CDE, sowie α' und β' die Abstände der Punkte A und B von der Kante CD, so hat man

$$AE : BE = \alpha : \beta, \text{ und } CDA : BCD = \alpha' : \beta',$$

folglich

$$\alpha : \alpha' = \beta : \beta'.$$

Das Verhältniss $\alpha : \alpha'$ ist aber gleich dem Sinus des Winkels der Ebenen CED und CAD, und $\beta : \beta'$ gleich dem Sinus des Winkels der Ebenen CED und CBD; daher drückt die letzte Proportion die Gleichheit

dieser Sinus aus. Die Ebene CED halbirt also den Flächenwinkel zwischen den Seitenflächen CBD und CAD. Da in dieser Ebene die Mittelpunkte der beiden übrigen Massen c und d liegen, so muss auch der Mittelpunkt des ganzen Systems der vier gegebenen Massen in ihr liegen.

Der Mittelpunkt eines Systems von vier Massen, deren Mittelpunkte in den Ecken eines Tetraeders liegen und die den gegenüberliegenden Tetraederflächen proportional sind, ist der Schnittpunkt der Halbirungsebenen der Flächenwinkel an den Kanten des Tetraeders. Man überzeugt sich leicht, dass *dieser Punkt das Centrum der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel ist.*

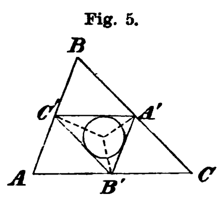
15. *Massenmittelpunkte eines Systems von homogenen geraden Strecken.*

Der Mittelpunkt einer homogenen geraden Strecke liegt in ihrer Mitte; daher lässt sich ein System von homogenen geraden Strecken durch das System der Punkte ersetzen, welche die Mitten der geraden Strecken sind und deren Massen den Massen der entsprechenden Strecken gleich sind. Haben die Massen aller Strecken dieselbe Dichtigkeit, so sind sie den Längen der Strecken proportional.

Die im vorigen § dargelegten Regeln erlauben den Mittelpunkt eines Systems homogener Strecken graphisch zu bestimmen.

Mittelpunkt des homogenen Perimeters eines Dreiecks. (Fig. 5). Die Mitten A', B', C' der Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC sind die Mittelpunkte dieser Seiten. Der Mittelpunkt des Dreieckumfangs ist der Mittelpunkt eines Systems von drei den Seiten BC, CA, AB gleichen und in den Punkten A', B', C' concentrirten Massen, und da

Fig. 5.



$$BC : AC : AB = B'C' : A'C' : A'B',$$

so sind die in den Ecken des Dreiecks $A'B'C'$ concentrirten Massen den gegenüberliegenden Seiten dieses Dreiecks proportional; mithin liegt der Mittelpunkt des von diesen Massen gebildeten Systems im Centrum des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises (s. § 14, 1. b.). *Der Mittelpunkt eines homogenen Dreieckumfangs liegt also im Centrum des Kreises, der dem aus den Seitenmitten des gegebenen Dreiecks gebildeten Dreieck einbeschrieben ist.*

Es seien l_1, l_2, l_3, ... l_n die Längen von n gegebenen Strecken, a_1, a_2, a_3, ... a_n ihre Dichtigkeiten, x_p, y_p, z_p die geradlinigen Coordinaten des einen Endpunktes der Strecke

l_p, x'_p, y'_p, z'_p die des andern Endpunktes und m_p die Masse der Strecke l_p; man hat dann

$$l_p = [(x_p - x'_p)^2 + (y_p - y'_p)^2 + (z_p - z'_p)^2 + 2(y_p - y'_p)(z_p - z'_p)\cos(yz) + \\ + 2(z_p - z'_p)(x_p - x'_p)\cos(zx) + 2(x_p - x'_p)(y_p - y'_p)\cos(xy)]^{\frac{1}{2}}$$

und $m_p = l_p a_p$. Die Coordinaten ξ_p, η_p, ζ_p der Mitte von l_p sind bestimmt durch die Formeln:

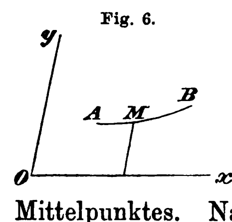
$$\xi_p = \frac{1}{2}(x_p + x'_p),\ \eta_p = \frac{1}{2}(y_p + y'_p),\ \zeta_p = \frac{1}{2}(z_p + z'_p).$$

Hiermit ergeben sich nach Formel (1) die Coordinaten des Mittelpunktes des ganzen Massensystems m_1, m_2, ... m_n, nämlich:

$$\alpha = \frac{\Sigma m_p \xi_p}{\Sigma m_p},\ \beta = \frac{\Sigma m_p \eta_p}{\Sigma m_p},\ \gamma = \frac{\Sigma m_p \zeta_p}{\Sigma m_p}.$$

16. *Massenmittelpunkt des Bogens einer ebenen Curve.* Liegt die Curve mit allen ihren Punkten in einer Ebene, so liegt auch ihr Mittelpunkt in dieser Ebene (nach Lehrs. I, §. 14); mithin lässt sich die Lage dieses Punktes durch zwei geradlinige Coordinaten in Bezug auf zwei in dieser Ebene angenommene Axen Ox und Oy (Fig. 6) bestimmen. Es sei s ein im Punkte A beginnender und in $M(x, y)$ endigender Bogen der Curve AB, ϱ die Dichtigkeit der Curve im Punkte M, m die Masse der Strecke AB und α, β die Coordinaten ihres Mittelpunktes. Nach §. 13 ist nun:

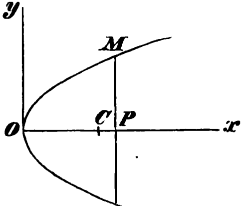
Fig. 6.



$$m = \int \varrho ds,\ \alpha m = \int \varrho x ds,\ \beta m = \int \varrho y ds. \qquad (5)$$

Ist die Masse der Curve homogen, so ist die Dichtigkeit ϱ constant und tritt vor das Integralzeichen; dadurch wird:

Fig. 7.



$$m = \varrho s,\ \alpha s = \int x ds,\ \beta s = \int y ds.$$

Beispiele. 1) *Mittelpunkt eines homogenen Parabelbogens.*

Es sei $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem Ox, Oy (Fig. 7), mit dem Ursprung O im Scheitel der Parabel. Die Axe Ox ist die Parabelaxe. Setzt man $OM = s$, so findet man zunächst:

$$s = \frac{1}{p}\int_0^y (y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}\, dy = \frac{y}{2p}(y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{p}{2}\log\left[\frac{y + (y^2 + p)^{\frac{1}{2}}}{p}\right],$$

dann folgt aus den Formeln (5):

$$s\alpha = \frac{1}{2p^2}\int_0^y y^2 (y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}\, dy = \frac{y}{8p^2}(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p}{8}\, s,$$

$$s\beta = \frac{1}{p}\int_0^y y\,(y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}\, dy = \frac{1}{3p}(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\, p^2;$$

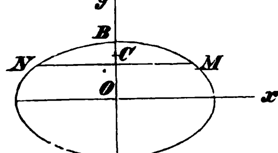
folglich wird:

$$\alpha = \frac{y}{8p^2 s}(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p}{8},\quad \beta = \frac{1}{3ps}(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{3s}.$$

Der Mittelpunkt C eines Bogens NM, der von einer zur Parabelaxe senkrechten Sehne unterspannt wird, liegt auf der Axe Ox, in einem Abstand gleich der eben gefundenen Grösse α vom Scheitel der Parabel.

2) *Mittelpunkt eines homogenen Ellipsenbogens.* Die Coordinatenaxen Ox, Oy mögen mit den Axen der Ellipse zusammenfallen (Fig. 8). Die Gleichung der Ellipse sei

Fig. 8.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und $s = BM$ sei ein an der kleinen Axe beginnender Bogen. Dieser Bogen lässt sich durch ein elliptisches Integral der zweiten Gattung darstellen, nämlich:

$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\,.\, d\varphi,$$

wo $k = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ und $\sin\varphi = \frac{x}{a}$ ist.

Die Formeln (5) liefern:

$$s\alpha = a^2\int_0^\varphi \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\,.\, d\varphi,$$

$$s\beta = ab\int_0^\varphi \cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\,.\, d\varphi.$$

Führt man die Integrationen aus und dividirt durch s, so folgt, wenn man $1 - k^2 = k'^2$ setzt:

$$\alpha = \frac{a^2 k'^2}{2ks}\log\left(\frac{1 + k}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + k\cos\varphi}\right) + \frac{a^2}{2s} - \frac{a^2}{2s}\cos\varphi\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},$$

$$\beta = \frac{ab}{s} \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + \frac{ab}{2ks} \operatorname{arc\,sin}(k \sin\varphi).$$

Der Mittelpunkt C eines Bogens MN, dessen Sehne auf der kleinen Axe OB senkrecht steht, liegt auf dieser Axe, in einem Abstand $CO = \beta$ vom Centrum der Ellipse.

Ist $k = 0$, so geht die Ellipse in einen Kreis über; dann ist

$$\beta = \frac{a^2}{s} \sin\varphi.$$

Da der Bogen $MN = 2s$ und seine Sehne gleich $2a \sin\varphi$ ist, so ist

$$\beta = \frac{a \,.\, \text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN} \text{ und } \frac{\beta}{a} = \frac{\text{Sehne } MN}{\text{Bogen } MN},$$

folglich *liegt der Mittelpunkt eines homogenen Kreisbogens auf dem durch die Mitte des Bogens gehenden Radius in einem Abstande vom Centrum des Kreises, der sich zum Radius verhält, wie die Länge der Sehne zur Länge des Bogens.*

Man bestimme ferner die Mittelpunkte des Bogens der Hyperbel, der Cycloide, der archimedischen und der logarithmischen Spirale.

Beispiele für die Mittelpunkte nicht homogener Linien.

1) *Mittelpunkt einer nicht homogenen geraden Strecke.*

Es sei s die Länge der ganzen Strecke, x der Abstand eines ihrer Punkte vom Anfangspunkt, $\varrho = f(x)$ die Dichtigkeit in diesem Punkte und α der Abstand des Mittelpunktes vom Anfangspunkte.

Nach den Formeln (5) hat man:

$$m = \int_0^s f(x)dx, \quad \alpha = \frac{1}{m}\int_0^s x f(x)dx.$$

Es sei z. B. $f(x) = a(b + x)^n$. Ist n nicht gleich -1, so wird:

$$m = \frac{a}{n+1}\left[(b+s)^{n+1} - b^{n+1}\right], \quad \alpha = \frac{[(n+1)s - b](b+s)^{n+1} + b^{n+2}}{(n+2)\,[(b+s)^{n+1} - b^{n+1}]}.$$

Ist aber $n = -1$, d. h. $f(x) = a(b+x)^{-1}$, so findet man:

$$m = a \log\left(1 + \frac{s}{b}\right), \quad \alpha = \frac{s}{\log\left(1 + \frac{s}{b}\right)} - b.$$

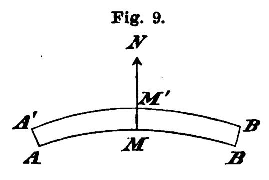


Fig. 9.

2) Es sei V eine Function des Punktes M (Fig. 9) in einer Ebene, AB die Niveaulinie (V), die durch diesen Punkt geht, $A'B'$ die ihr unendlich nahe Niveaulinie $(V + dV)$ für $dV > 0$; $P = MN$

der Differentialparameter der Function V, M' sein Schnittpunkt mit $A'B'$; A' und B' diejenigen Lagen von M', welche den Lagen A und B von M entsprechen; s die Länge des Bogens AM.

Man kann nun den unendlich schmalen Flächenstreifen, der zwischen den Curven AB und $A'B'$ und den Geraden AA' und BB' liegt, als Masse einer Linie ansehen, deren Dichtigkeit proportional der Breite MM' ist. Bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung kann man $P = \frac{dV}{MM'}$, also $MM' = \frac{dV}{P}$ setzen. Da aber dV auf der ganzen Strecke AB constant ist, so ist die Dichtigkeit ϱ dieser Linie dem Differentialparameter P umgekehrt proportional; wird also die Lage des Punktes M durch geradlinige Coordinaten bestimmt, so hat man nach den Formeln (5):

$$\alpha \int \frac{ds}{P} = \int \frac{x\,ds}{P}, \quad \beta \int \frac{ds}{P} = \int \frac{y\,ds}{P}.$$

Es seien z. B. λ und μ die elliptischen Coordinaten des Punktes M (s. Kinematik Seite 119 und 171) und $V = \lambda$. Dann ist AB die Länge des Bogens der Ellipse (λ), welcher in dem einem gewissen Werthe $\mu = \mu_0$ entsprechenden Punkte A anfängt. Es ist:

$$P = \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{\lambda^2 - \mu^2}}, \quad ds = \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}} \cdot d\mu;$$

also:

$$\int \frac{ds}{P} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(\lambda^2 - \mu^2)\,d\mu}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}} = \frac{2\lambda^2 - c^2}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \left[\arcsin\left(\frac{\mu}{c}\right) - \arcsin\frac{\mu_0}{c}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \left(\mu\sqrt{c^2 - \mu^2} - \mu_0\sqrt{c^2 - \mu_0^2}\right),$$

$$\int \frac{x\,ds}{P} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(\lambda^2 - \mu^2)\,\lambda\mu\,d\mu}{c\sqrt{\lambda^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}} =$$

$$\frac{\lambda}{c\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \left\{ \begin{matrix} (\lambda^2 - \mu_0^2)\sqrt{c^2 - \mu_0^2} \\ -(\lambda^2 - \mu^2)\sqrt{c^2 - \mu^2} \end{matrix} + \frac{2}{3}\left[(c^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} - (c^2 - \mu_0^2)^{\frac{3}{2}}\right] \right\},$$

$$\int \frac{y\,ds}{P} = \frac{1}{c} \int_{\mu_0}^{\mu} (\lambda^2 - \mu^2)\,d\mu = \frac{1}{c}\left[\lambda^2(\mu - \mu_0) - \frac{\mu^3}{3} + \frac{\mu_0^3}{3}\right].$$

Nach diesen Formeln erhält man für den Ellipsenquadranten:

$$\alpha = \frac{4\lambda\,(3\lambda^2 - 2c^2)}{3\pi\,(2\lambda^2 - c^2)}, \quad \beta = \frac{4\,(3\lambda^2 - c^2)\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{3\pi\,(2\lambda^2 - c^2)}.$$

17. *Massenmittelpunkt des Bogens einer doppelt gekrümmten Curve.*

Es sei ds das Differential des Bogens s; x, y, z die geradlinigen Coordinaten seines Endpunktes, ϱ die Dichtigkeit des Bogens in diesem Punkte, m die Masse des ganzen Bogens und α, β, γ die Coordinaten des Massenmittelpunktes. Es ist dann:

$$m = \int \varrho ds, \ \alpha m = \int \varrho x ds, \ \beta m = \int \varrho y ds, \ \gamma m = \int \varrho z ds.$$

Gesetzt z. B., s sei der Bogen einer Schraubenlinie auf einem geraden Kreiscylinder, dessen Axe die z-Axe des Coordinatensystems ist; der Ursprung sei der Mittellpunkt der Basis. Bezeichnet R den Radius der Basis und h die Ganghöhe der Schraube, so sind die Gleichungen der Schraubenlinie:

$$x = R \cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right), \ y = R \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right);$$

daher wird

$$ds = \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2} \cdot \frac{dz}{h}, \ s = \frac{1}{h}\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}\int_0^z dz = \frac{z}{h}\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2},$$

$$\int_0^z x ds = \frac{\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}\cdot y}{2\pi}, \int_0^z y ds = \frac{\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}(R-x)}{2\pi}, \int_0^z z ds = \sqrt{h^2+4\pi^2R^2}\cdot\frac{z^2}{2h},$$

also, wenn die Dichtigkeit ϱ constant ist:

$$\alpha = \frac{hy}{2\pi z}, \ \beta = \frac{h(R-x)}{2\pi z}, \ \gamma = \frac{z}{2}.$$

Für den vierten Theil eines vollen Schraubenumganges hat man

$$z = \frac{1}{4}h, \ x = 0, \ y = R$$

zu setzen, womit sich ergiebt:

$$\alpha = \frac{2R}{\pi}, \ \beta = \frac{2R}{\pi}, \ \gamma = \frac{1}{8}h.$$

Man bestimme ferner die Mittelpunkte der folgenden Curven: 1) der Krümmungslinie auf einem Ellipsoid, 2) der Schnittcurve eines Ellipsoids mit einer concentrischen Kugel und 3) derjenigen Curve, in welche sich die letztere bei der Transformation vermittelst reciproker Radienvectoren verwandelt (vgl. Kinematik Seite 160—162).

18. *Coordinaten des Massenmittelpunktes eines ebenen Flächenraumes.*

Man denke sich in einer gegebenen Ebene einen von irgend

welchen Linien begrenzten Flächenraum S; die Punkte desselben seien durch geradlinige Coordinaten x, y auf die in der Ebene liegenden und den Winkel ϑ einschliessenden Axen Ox, Oy bezogen. Es sei ferner ϱ die Dichtigkeit der Masse des Flächenraumes im Punkte (x, y), m die Masse der ganzen Fläche S und α, β die Coordinaten ihres Mittelpunktes. Theilt man nun diesen Flächenraum durch Parallele zu den Coordinatenaxen in Elemente dS von zwei unendlich kleinen Dimensionen, so ist $dS = \sin\vartheta\, dxdy$; folglich wird

$$m = \sin\vartheta \int \varrho\, dxdy,$$
$$m\alpha = \sin\vartheta \int x\varrho\, dxdy,\ m\beta = \sin\vartheta \int y\varrho\, dxdy, \tag{6}$$

wobei die Integration sich über die ganze Fläche S erstrecken muss. Nach den Formeln (7) und (8) in § 5 lässt sich diese Integration auf eine über die Begrenzung s der Fläche S auszudehnende Integration zurückführen. Ist die Fläche homogen, so ist ϱ eine Constante, und die Ausdrücke (6) nehmen die Gestalt an:

$$S = \sin\vartheta \int dxdy,\ S\alpha = \sin\vartheta \int x dxdy,\ S\beta = \sin\vartheta \int y dxdy. \tag{7}$$

Diese Integrale gehen nach Formel (9) § 5 in die folgenden über:

$$S = \int y \cos(ny)\, ds, S\alpha = \int xy \cos(ny)\, ds, S\beta = \tfrac{1}{2} \int y^2 \cos(ny) ds; \tag{8}$$

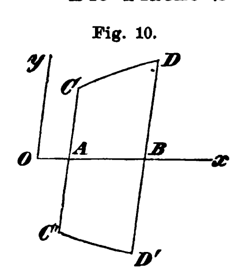
hierin bedeutet n die Richtung der äusseren Normale der Begrenzung s der gegebenen Fläche in einem beliebigen Punkte und ds das diesem Punkte entsprechende Element der Begrenzung.

Bei Anwendung dieser Formeln auf einen speciellen Fall hat man zuerst zu untersuchen, aus welchen Linien die Begrenzung s zusammengesetzt ist; man muss dann die durch verschiedene Gleichungen gegebenen Theile der Begrenzung bestimmen, sowie die Theile, welche zwar durch eine einzige Gleichung gegeben sind, in denen aber Punkte vorkommen, für die $\cos(ny)$ sein Zeichen wechselt. Dann bestimmt man für jeden Theil der Begrenzung die entsprechenden Theile der Integrale (8), drückt mit Hilfe der Gleichung des betreffenden Theiles der Begrenzung die Ordinate y als Function der Abscisse x aus und setzt $\cos(ny)ds = \pm \sin\vartheta\, dx$; dabei gilt das

Zeichen — für den Fall, dass die im Sinne der positiven y gerichtete Coordinatenlinie (x) durch die Punkte des betreffenden Theiles der Begrenzung in die Fläche S eintritt, das Zeichen $+$ dagegen, wenn sie aus derselben austritt.

Die Fläche S sei z. B. begrenzt durch die Axe Ox, die beiden Ordinaten CA und BD (Fig. 10) und eine Linie CD, deren Gleichung $y = f(x)$ ist. Die dem Theile AB der Begrenzung entsprechenden Elemente der Integrale (8) sind gleich Null; denn für alle Punkte dieses Theiles ist $y = 0$. Die den Theilen AC und BD der Begrenzung entsprechenden Elemente sind ebenfalls gleich Null; denn für alle Punkte dieser Linien ist $\cos(ny)$ gleich Null. Es bleiben daher in den Integralen (8) nur diejenigen Bestandtheile, die sich auf die Linie CD beziehen. Dabei ist $y = f(x)$ und $\cos(ny)ds = \pm \sin\vartheta dx$ zu setzen, und zwar mit dem Zeichen $+$, wenn $y > 0$, mit $-$, wenn $y < 0$ ist. Ist z. B. $y > 0$ für alle Punkte der Linie CD und sind x_0 und x die Abscissen der äussersten Punkte C und D, so wird:

Fig. 10.



$$S = \sin\vartheta \int_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

$$\alpha \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x} xf(x)dx, \quad \beta \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \tfrac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [f(x)]^2 dx. \tag{9}$$

Gesetzt, die Axe Ox sei ein Durchmesser der Curve $CDC'D'$ und die Fläche S sei von zwei diesem Durchmesser conjugirten Sehnen CC' und DD', sowie von den Curvenbogen CD und $C'D'$ begrenzt. In diesem Falle verschwinden die auf die Sehnen CC' und DD' bezüglichen Bestandtheile der Integrale (8). Die dann in S und $S\alpha$ übrig bleibenden Theile sind paarweise gleich mit gleichen Vorzeichen, während die in $S\beta$ übrigbleibenden Theile paarweise gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind; denn jedem Elemente $y^2 \sin\vartheta dx$ auf der Linie CD entspricht ein Element $-y^2 \sin\vartheta dx$ auf der Linie $C'D'$. Daher geben die Formeln (8) im vorliegenden Falle:

$$S = 2 \sin \vartheta \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx, \quad S\alpha = 2 \sin \vartheta \int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx, \quad \beta = 0. \quad (10)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der Mittelpunkt der Fläche $CDD'C'$ auf dem Durchmesser Ox liegt und die Abscisse

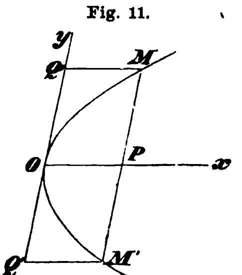
$$\alpha = \frac{\int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx}{\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}$$

hat, d. h. dieselbe wie für die Fläche $ABDC$.

Beispiele. 1) *Mittelpunkt eines Parabelsegments.*

Es sei Ox ein Durchmesser der Parabel MOM' (Fig. 11), Oy die Tangente der Parabel im Punkte O, MM' eine zu Ox conjugirte Sehne und $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel. Setzt man $x = OP$, $S = OPM$, so wird nach den Formeln (8):

Fig. 11.



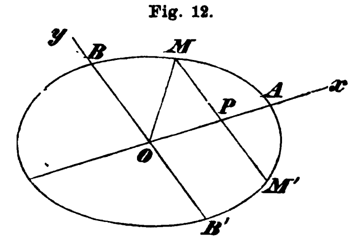
$$S = \tfrac{2}{3}\, xy \sin \vartheta\,, \quad \alpha = \tfrac{3}{5}\, x\,, \quad \beta = \tfrac{3}{8}\, y.$$

Die erste Formel zeigt, dass die Fläche OMP gleich $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms $OPMQ$ ist, das von der Abscisse und Ordinate gebildet wird.

Die Fläche $MM'O$ ist gleich $\frac{2}{3}$ des über der Sehne MM' und der Abscisse OP errichteten Parallelogramms. Der Mittelpunkt dieser Fläche liegt auf dem Diameter Ox in einer Entfernung gleich $\frac{3}{5}$ OP von O. Der Ausdruck für den Flächeninhalt des Parabelsegments und die Lage seines Massenmittelpunktes sind schon von Archimedes*) gefunden worden.

2) *Mittelpunkt eines elliptischen Segments.*

Fig. 12.



Es seien Ox und Oy (Fig. 12) conjugirte Durchmesser einer Ellipse, also deren Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

MM' sei eine zu Ox conjugirte Sehne und $OP = x$. Für die zwischen dem Halbmesser OB und der halben Sehne PM eingeschlossene Fläche $OPMB$ ergiebt sich aus den Formeln (8):

*) Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement avec un commentaire, par F. Peyrard. Paris 1844: De la quadrature de la parabole. De l'équilibre des plans ou de leurs centres de gravité.

$$S = \sin\vartheta\left[\frac{ab}{2}\arc\sin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{xy}{2}\right],$$

$$\alpha = \frac{2a^2(b^3 - y^3)}{3b^2\left[ab\arc\sin\left(\frac{x}{a}\right) + xy\right]}, \quad \beta = \frac{b^2(3a^2x - x^3)}{3a^2\left[ab\arc\sin\left(\frac{x}{a}\right) + xy\right]}.$$

Für den Ellipsenquadranten BOA findet man:

$$S = \frac{\pi}{4}ab\sin\vartheta, \quad \alpha = \frac{4a}{3\pi}, \quad \beta = \frac{4b}{3\pi}.$$

Für das Segment MAM' ergiebt sich aus den Formeln (10):

$$MAM' = \sin\vartheta\left[ab\arc\cos\left(\frac{x}{a}\right) - xy\right],$$

$$\alpha = \frac{2a^2y^3}{3b^2\left[ab\arc\cos\left(\frac{x}{a}\right) - xy\right]}, \quad \beta = 0.$$

Um hiervon auf das Kreissegment überzugehen, hat man $\vartheta = 90^0$ und $b = a$ zu setzen. So ergiebt sich für das Segment MAM' eines Kreises vom Radius a, wenn man $\sphericalangle MOA = \varphi$ setzt:

$$MAM' = a^2\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right],$$

$$\alpha = \frac{2}{3}a \cdot \frac{\sin^3\varphi}{\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi}.$$

Für den Halbkreis wird $\alpha = \dfrac{4a}{3\pi}$.

3) *Mittelpunkt der Trapezfläche und der Dreiecksfläche.*

Fig. 13.

In dem Trapez $CDD'C'$ (Fig. 13) seien CC' und DD' die parallelen Seiten. Nimmt man als x-Axe die Verbindungslinie der Mitten O und A dieser Seiten, als y-Axe die Seite CC' und setzt

$$OC = a, \quad AD = b, \quad OA = h,$$

so ist die Gleichung der Geraden CD:

$$y = a + \frac{b-a}{h}x.$$

Die Formeln (10) geben dann:

$$\alpha = \frac{h(2b+a)}{3(a+b)}, \quad \beta = 0.$$

Ist I der Mittelpunkt des Trapezes, so ist also

$$OI = \alpha, \quad AI = h - \alpha = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)},$$

und folglich:

$$OI : AI = 2b + a : 2a + b.$$

Für das Dreieck ODD' hat man $a = 0$ zu setzen; dann wird $\alpha = \frac{2}{3}h$. *Der Mittelpunkt einer Dreiecksfläche liegt also auf jeder der Verbindungslinien einer Ecke mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite in einem Abstande von der Ecke gleich $\frac{2}{3}$ des Abstandes dieser Ecke von der Mitte der Gegenseite.*

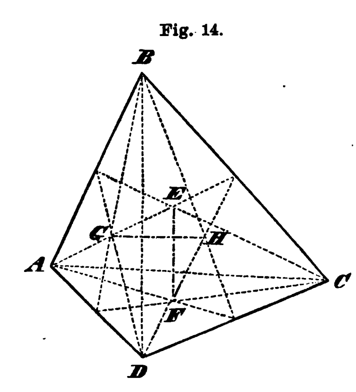
Der Mittelpunkt der Dreiecksfläche fällt mit dem Mittelpunkte dreier gleicher, in den Eckpunkten concentrirter Massen zusammen.

Nimmt man nämlich an, die Punkte O, D, D' seien die Mittelpunkte dreier gleicher Massen, so ist A der Mittelpunkt der zwei Massen, deren Mittelpunkte D und D' sind; daher muss der Mittelpunkt aller drei Massen auf der Geraden OA liegen; da aber der Punkt I die Strecke OA im Verhältniss $OI : IA = 2 : 1$, d. h. im umgekehrten Verhältniss der Massen, deren Mittelpunkte O und A sind, theilt, so ist I der Mittelpunkt dieser Massen.

Um den Mittelpunkt der Masse eines beliebigen homogenen Polygons zu bestimmen, zerlegt man es in Dreiecke oder Trapeze und bestimmt die Mittelpunkte dieser einzelnen Theile. Dann ergeben sich die Mittelpunktscoordinaten des ganzen Polygons nach den allgemeinen, für ein Massensystem geltenden Regeln. In derselben Weise kann man den Massenmittelpunkt der Oberfläche eines beliebigen homogenen Polyeders bestimmen.

Um den Mittelpunkt der Fläche eines beliebigen Vierecks $ABCD$ (Fig. 14) graphisch zu bestimmen, theilt man es durch eine Diagonale AC in die Dreiecke ABC und ACD, bestimmt die Mittelpunkte E und F dieser Dreiecke und zieht die Gerade EF; dann theilt man das Viereck $ABCD$ durch die Diagonale BD in die Dreiecke ABD und CBD, bestimmt die Mittelpunkte G und H dieser Dreiecke und zieht die Gerade GH. Der Mittelpunkt des Vierecks ist der Schnittpunkt der Geraden EF und GH. Zur Bestimmung der Punkte E, F, G, H braucht man die Diagonalen AC und BD nicht wirklich zu ziehen; man kann sie als Schnittpunkte der Verbindungslinien der Eckpunkte mit den Seitenmitten bestimmen.

Fig. 14.



Um den Mittelpunkt eines beliebigen Fünfecks zu finden, theilt man dasselbe durch eine Diagonale in ein Viereck und ein Dreieck, bestimmt die Mittelpunkte dieser Flächen und zieht durch die gefundenen Punkte eine Gerade. Dann wiederholt man dieselbe Construction, indem man das Fünfeck durch eine andere Diagonale in ein Viereck und ein Dreieck theilt. Im Schnittpunkte der beiden so erhaltenen Geraden ergiebt sich der Mittelpunkt des Fünfecks. Diese Methode lässt sich auf jedes beliebige Polygon ausdehnen.

Um den Mittelpunkt des Mantels einer Pyramide zu finden, bestimmt man den Mittelpunkt jeder der dreiseitigen Seitenflächen und dann den Mittelpunkt des Systems der so erhaltenen Punkte, indem man die Massen dieser Punkte den Flächenräumen der entsprechenden Seitenflächen gleich setzt. Man überzeugt sich leicht, dass alle diese Punkte in einer Ebene liegen, die von der Spitze der Pyramide um $\frac{2}{3}$ der Höhe derselben absteht.

Ist die Pyramide regulär, so fällt ihr Mittelpunkt mit dem des Perimeters desjenigen Polygons zusammen, welches man als Schnitt der Mantelfläche mit jener Ebene erhält. Denn die Seitenflächen sind den Seiten dieses Polygons proportional und ihre Mittelpunkte liegen in den Seitenmitten.

In ähnlicher Weise lässt sich auch leicht der Mittelpunkt des Mantels einer parallel der Basis abgeschnittenen Pyramide finden.

19. Bezeichnet man mit x und y die rechtwinkligen geradlinigen Coordinaten eines beliebigen Punktes M in einem ebenen Flächenraume S, mit α und β die Coordinaten des Mittelpunktes der ganzen Fläche S, bezogen auf die in der Ebene von S liegenden Axen Ox und Oy, sind ferner $OM = r$ und $\sphericalangle MOx = \varphi$ die Polarcoordinaten des Punktes M, so ergiebt sich, wenn man die Flächen S durch die Coordinatenlinien (r) und (φ) in Elemente von zwei unendlich kleinen Dimensionen theilt, für das Element dS der Ausdruck $r\,drd\varphi$; also wird:

$$S = \int r\,dr\,d\varphi,$$
$$S\alpha = \int x r\,dr\,d\varphi = \int r^2 \cos\varphi\,dr\,d\varphi,$$
$$S\beta = \int y r\,dr\,d\varphi = \int r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi,$$

wobei die Integration sich über die ganze Fläche S zu erstrecken hat. Nach Formel (10) § 5 lassen sich diese Integrale in die folgenden umformen:

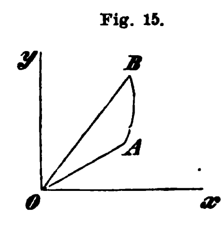
$$S = \tfrac{1}{2}\int r \cos(nr)\,ds, \tag{11}$$
$$S\alpha = \tfrac{1}{3}\int r^2 \cos\varphi \cos(nr)\,ds, \quad S\beta = \tfrac{1}{3}\int r^2 \sin\varphi \cos(nr)\,ds,$$

die über die ganze Begrenzung s der Fläche S auszudehnen sind.

Liegt der Pol O innerhalb der Fläche S oder auf deren Begrenzung s, so hat der auf ihn bezügliche Theil der Integrale (11) die Form $-F(0,\varphi)d\varphi$; dieser Theil verschwindet aber, weil die Function $F(r,\varphi)$ hier den Factor r enthält, also für $r = 0$ verschwindet.

Gesetzt, die Fläche S sei ein Sector, der von den beiden Radienvectoren OA und OB und von der Curve AB begrenzt ist; die Gleichung der Curve sei $r = f(\varphi)$. Die auf die Radienvectoren OA und OB bezüglichen Theile der Integrale (11) verschwinden, weil für sie $\cos(nr) = 0$ ist. Folglich bleibt nur der auf die Curve AB bezügliche Theil übrig. Für die Punkte dieses Theils ist

Fig. 15.



$$\frac{ds}{r}\cos(nr) = d\varphi,$$

und zwar mit positivem Vorzeichen, weil die Radienvectoren in allen Punkten der Curve AB aus der Fläche S austreten.

Bezeichnet man also die Winkel AOx und BOx mit φ_0 und φ, so ist

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi,\quad S\alpha = \frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^3 \cos\varphi\, d\varphi,\quad S\beta = \frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^3 \sin\varphi\, d\varphi, \quad (12)$$

wo $r = f(\varphi)$ zu setzen ist.

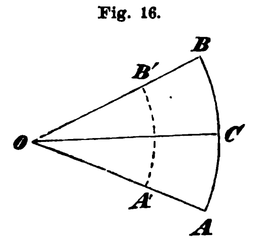
Beispiel. Mittelpunkt eines Kreissectors.

Es sei (Fig. 16) $OA = r$ der Radius des Kreises, AOB der Kreissector, C die Mitte des Bogens AB und $\sphericalangle\, COB = \varphi$. Nach den Formeln (12) ergiebt sich:

$$S = r^2\varphi,\quad \alpha = \frac{2r\sin\varphi}{3\varphi},\quad \beta = 0.$$

Aus dem Ausdrucke für α sieht man leicht, dass der Mittelpunkt des Sectors mit dem Mittelpunkte eines um O mit einem Radius gleich $\frac{2}{3}r$ beschriebenen Bogens $A'B'$ zusammenfällt.

Fig. 16.



Man bestimme ferner den Mittelpunkt eines Sectors, wenn der Bogen AB eine archimedische oder logarithmische Spirale ist.

20. *Coordinaten des Mittelpunkts einer über eine krumme Fläche S vertheilten Masse.*

Ein beliebiger Punkt der Fläche S sei durch rechtwinklige geradlinige Coordinaten x, y, z in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz bestimmt; ϱ sei die Dichtigkeit in jenem Punkte und α, β, γ die Coordinaten des Mittelpunkts der Fläche S. Zur Bestimmung dieser Coordinaten hat man die Formeln

$$\alpha = \frac{1}{m}\int x\varrho dS,\quad \beta = \frac{1}{m}\int y\varrho dS,\quad \gamma = \frac{1}{m}\int z\varrho dS, \qquad (13)$$

worin $m = \int \varrho dS$ die Masse der Fläche S bedeutet. Ist diese Masse homogen, so gehen die Formeln in die folgenden über:

$$\alpha = \frac{1}{S}\int x dS,\quad \beta = \frac{1}{S}\int y dS,\quad \gamma = \frac{1}{S}\int z dS. \qquad (14)$$

Beispiel. Mittelpunkt eines beliebigen Theiles einer Kugelfläche.

Ist S ein Stück einer Kugelfläche vom Radius r und sind die Axen Ox, Oy, Oz rechtwinklig, so lassen sich das Element dS und die Coordinaten x, y, z in Polarcoordinaten, nämlich dem Radiusvector $OM = r$, dem Winkel $zOM = \varphi$ und dem Flächenwinkel ψ, den die Ebene zOM mit der Ebene zOx bildet, durch die folgenden Formeln ausdrücken:

$$dS = r^2 \sin\varphi d\varphi d\psi, \quad \text{(s. § 4)}$$

$$x = r\sin\varphi\cos\psi,\quad y = r\sin\varphi\sin\psi,\quad z = r\cos\varphi;$$

folglich wird:

$$\left.\begin{aligned} S &= r^2\int \sin\varphi d\varphi d\psi, \\ \alpha &= \frac{r^3}{S}\int \sin^2\varphi\cos\psi d\varphi d\psi, \\ \beta &= \frac{r^3}{S}\int \sin^2\varphi\sin\psi d\varphi d\psi, \\ \gamma &= \frac{r^3}{S}\int \cos\varphi\sin\varphi d\varphi d\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Nach Formel (8) § 5 lassen sich diese Integrale in solche verwandeln, die sich über die Begrenzung s der Fläche S erstrecken. Allgemein hat man nämlich

$$\int f(\varphi, \psi) d\varphi d\psi = \int F(\varphi, \psi)\frac{\cos(na_1)}{r\sin\varphi} ds, \qquad (16)$$

wo

$$f(\varphi, \psi) = \frac{\partial F(\varphi, \psi)}{\partial \varphi},$$

n die die Kugelfläche berührende äussere Normale der Begrenzung s und a_1 die Richtung des die Coordinatenlinie (ψ) berührenden Parameters der Coordinate φ ist. Man hat nun mit Hilfe der Gleichungen der Begrenzung φ als Function von ψ auszudrücken und

$$\frac{\cos(na_1) ds}{r\sin\varphi} = \pm d\psi$$

zu setzen; dabei gilt das Zeichen — für den Fall, dass ein Punkt, welcher die im Sinne von $\Delta\varphi > 0$ gerichtete Coordinatenlinie (ψ) beschreibt, in die Begrenzung der Fläche S eintritt, während das Zeichen $+$ einem Austritt entspricht.

Befindet sich der Schnittpunkt A der Axe Oz mit der Kugelfläche

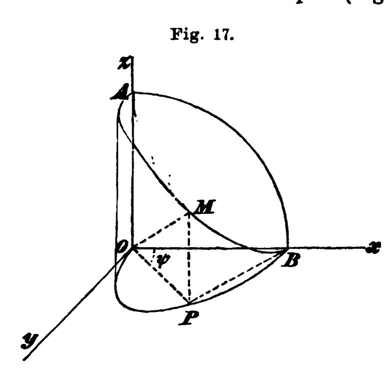
innerhalb der Fläche S oder auf ihrer Begrenzung, so enthält das Integral (16) einen auf diesen Punkt bezüglichen Theil

$$-\int F(0, \psi) d\psi,$$

in welchem die Integration sich über alle Werthe erstreckt, welche die Coordinate ψ im Punkte A hat.

Wenden wir zum Beispiel (Fig. 17) die Formeln (15) auf denjenigen Theil der Kugelfläche an, welcher von einem Quadranten AB des in der Ebene zOx liegenden grössten Kreises und von der Schnittcurve AMB der Kugel mit einem Cylinder begrenzt ist, dessen Erzeugende parallel Oz und dessen Basis ein Halbkreis OPB vom Durchmesser OB gleich dem Kugelradius ist. Die auf den Kreisbogen AB bezüglichen Elemente des Integrals (16) verschwinden; denn hier ist $\cos(na_1) = 0$; für die Elemente der Curve AMB ist

Fig. 17.



$$\frac{\cos(na_1) ds}{r \sin \varphi} = d\psi$$

zu setzen. Ist P die Projection eines auf der Curve AMB liegenden Punktes M auf die Ebene xOy und zieht man die Geraden MP, OP, PB, so sind OPM und OPB zwei congruente rechtwinklige Dreiecke; daher ist

$$\sphericalangle MOP = \sphericalangle BOP = \psi, \text{ d. h. } \varphi = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Mithin ist für alle Punkte der Curve AMB:

$$F(\varphi, \psi) = F\left(\frac{\pi}{2} - \psi, \psi\right).$$

Wendet man mit Beachtung hiervon die Formel (16) auf die Integrale (15) an, so ergiebt sich:

$$S = r^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin \psi) d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\right] = r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

$$\alpha = \frac{r^3}{2S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \psi - \sin \psi \cos \psi\right) \cos \psi d\psi = \frac{r^3}{3S},$$

$$\beta = \frac{r^3}{2S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \psi - \sin \psi \cos \psi\right) \sin \psi d\psi = \frac{r^3}{2S} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right),$$

$$\gamma = \frac{r^3}{2S}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi d\psi = \frac{r^3\pi}{8S}.$$

Die Grösse des Theils der Kugelfläche, welcher von dem vollständigen Cylinder, dessen Basis der ganze Kreis vom Durchmesser OB ist, eingeschlossen wird, ist

$$2S = \pi r^2 - 2r^2,$$

also gleich der Differenz einer Kreisfläche vom Radius r und des in diesen Kreis einbeschriebenen Quadrats. Subtrahirt man also $8S$ von der Oberfläche $4\pi r^2$ der ganzen Kugel, so bleibt der Rest $8r^2$, der sich in ein Quadrat verwandeln lässt.

Die Frage über die Quadratur eines solchen Theiles der Kugeloberfläche wurde von dem Geometer Viviani im Jahre 1692 gestellt und von ihm durch geometrische Construction gelöst. Leibnitz löste die Aufgabe vermittelst der Integralrechnung.

21. Die letzte der Formeln (15) lässt sich in der Form darstellen

$$\gamma = \frac{r}{S}\int \cos\varphi dS,$$

wo $\cos\varphi dS$ die Projection des Elements dS auf die Ebene xOy ist. Bezeichnet man mit S_z die Summe der Projectionen aller solchen Elemente, d. h. die Projection der ganzen Fläche S auf die Ebene xOy, so ist

$$\int \cos\varphi dS = S_z,$$

also $\gamma = \frac{rS_z}{S}$ oder $S : S_z = r : \gamma$, d. h. *jeder beliebige Theil einer Kugelfläche verhält sich zu seiner orthogonalen Projection auf eine durch den Kugelmittelpunkt gehende Ebene, wie der Kugelradius zu dem Abstand des Massenmittelpunkts der projicirten Fläche von der Projectionsebene.**)

Denken wir uns durch den Kugelmittelpunkt unter einem Winkel α gegen die Ebene xOy eine beliebige Ebene P gelegt; es sei S' die Schnittfläche dieser Ebene mit dem die Fläche S auf die Ebene xOy projicirenden Cylinder. Da S und S' eine gemeinsame Projection in der Ebene xOy haben, so ist

$$S_z = S' \cos\alpha;$$

*) Giulio, Journal de Liouville. T. IV.

folglich ist:

$$\gamma = \frac{r S' \cos\alpha}{S}.$$

Bedeutet ferner γ' die Länge des vom Massenmittelpunkte der Fläche S auf die Ebene P gefällten und bis zum Schnitt mit der Ebene xOy verlängerten Perpendikels, so ist $\gamma = \gamma' \cos\alpha$; folglich $\gamma' = \frac{rS'}{S}$ oder:

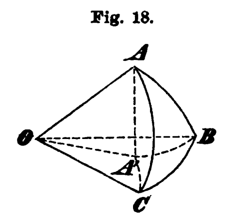
$$S : S' = r : \gamma',$$

d. h. *ein beliebiger Theil einer Kugelfläche verhält sich zu seiner schiefwinkligen Projection auf eine gegebene, durch den Kugelmittelpunkt gehende Ebene, wie der Kugelradius zu der Länge der vom Massenmittelpunkte der Fläche auf die Projectionsebene gefällten und bis zum Schnitt mit derjenigen Ebene verlängerten Senkrechten, welche durch den Kugelmittelpunkt geht und auf den projicirenden Geraden senkrecht steht.**)

Dieser Satz, der den vorhergehenden als Specialfall in sich enthält, kann zur Bestimmung der Massenmittelpunkte vieler sphärischer Figuren dienen.

Beispiele. 1) *Massenmittelpunkt eines sphärischen Dreiecks.* Es sei S die Fläche eines sphärischen Dreiecks ABC (Fig. 18); A, B, C seine Winkel; a, b, c die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten; α, β, γ die Abstände des Mittelpunkts der Fläche S von den Ebenen der die Seiten des Dreiecks enthaltenden grössten Kreise. Die Projection der Fläche S auf die die Seite a enthaltende Ebene BOC ist gleich dem Kreissector BOC, vermindert um die Projectionen der Sectoren AOB und AOC auf dieselbe Ebene; folglich ist sie gleich

Fig. 18.



$$\frac{r^2}{2}(a - b\cos C - c\cos B)\frac{\pi}{180}.$$

Für den Flächeninhalt S des Dreiecks gilt aber, wie bekannt, die Formel:

$$S = \frac{\pi r^2}{180}(A + B + C - 180^0);$$

mithin ergiebt sich nach dem ersten der obigen Sätze:

$$\alpha = \frac{r(a - b\cos C - c\cos B)}{2(A + B + C - 180^0)}.$$

---

*) Schellbach in Crelle's Journal, Bd. 45 (1853).

Ebenso erhält man:

$$\beta = \frac{r(b - a\cos C - c\cos A)}{2(A + B + C - 180^0)}, \quad \gamma = \frac{r(c - a\cos B - b\cos A)}{2(A + B + C - 180^0)};$$

dabei sind die Winkel und Seiten des Dreiecks in Graden auszudrücken.

Man kann die Sectorenfläche BOC ansehen als schiefwinklige Projection des sphärischen Dreiecks ABC auf die Ebene BOC durch Projicirende, die dem Radius OA parallel laufen; ferner die Sectorenfläche AOC als Projection von S auf die Ebene AOC durch Projicirende parallel dem Radius OA; und endlich den Sector AOB als Projection von S auf die Ebene AOB durch Projicirende parallel OC. Bezeichnet man also mit α', β', γ' die vom Mittelpunkt der Fläche ABC auf die Seitenflächen des Tetraeders $OABC$ gefällten und bis zum Schnitt mit den auf den Kanten AO, OB, OC senkrechten Ebenen verlängerten Perpendikel, so folgt aus dem zweiten der in diesem § bewiesenen Sätze:

$$\alpha' = \frac{ra}{2(A + B + C - 180^0)},$$

$$\beta' = \frac{rb}{2(A + B + C - 180^0)}, \quad \gamma' = \frac{rc}{2(A + B + C - 180^0)}.$$

Man erkennt leicht, dass α', β', γ' die geradlinigen Coordinaten des Mittelpunkts der Fläche des sphärischen Dreiecks ABC bezüglich dreier Axen sind, die vom Kugelmittelpunkt als Ursprung nach den Polen der Dreiecksseiten gehen.

2) *Massenmittelpunkt der Oberfläche eines sphärischen Segments.*

Der Mittelpunkt der Fläche eines durch eine beliebige Ebene abgeschnittenen sphärischen Segments liegt offenbar auf dem vom Kugelmittelpunkt auf diese Ebene gefällten Perpendikel. Sein Abstand γ vom Kugelmittelpunkt muss sich zum Kugelradius verhalten, wie der Flächeninhalt des Schnittkreises zur Oberfläche des Segments. Ist also h die Höhe des Segments, so hat man

$$\gamma : R = \pi h(2R - h) : 2\pi Rh,$$

woraus folgt:

$$\gamma = R - \frac{h}{2},$$

d. h. *der Massenmittelpunkt der Fläche eines sphärischen Segments liegt in der Mitte seiner Höhe.*

Ebenso lässt sich mit Hilfe des ersten Satzes dieses § beweisen, dass *der Mittelpunkt einer zwischen zwei Parallelebenen liegenden Kugelzone gleichfalls in der Mitte ihrer Höhe liegt.*

22. Sind die Punkte der gegebenen Fläche S durch irgend welche drei Coordinaten q_1, q_2, q_3 bestimmt, zwischen denen eine Gleichung $f(q_1, q_2, q_3) = 0$ besteht, so gilt (vergl. § 4) für das Flächenelement die Formel

$$dS = \pm \frac{\omega P}{\frac{\partial f}{\partial q_3}} dq_1 dq_2,$$

worin

$$\omega = a_1 a_2 a_3 \Delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 \Delta'^{\frac{1}{2}}}$$

ist und Δ und Δ' die in Cap. VIII der Kinematik angegebenen Bedeutungen haben, während P den Differentialparameter der Function $f(q_1, q_2, q_3)$ bezeichnet. Um nun die Masse der Fläche und ihre Mittelpunktscoordinaten zu bestimmen hat man diesen Ausdruck für dS in die Formeln (13) § 20 einzusetzen; dann drückt man alle unter dem Integralzeichen stehenden Grössen als Functionen von zwei Coordinaten q_1 und q_2 mit Hilfe der Gleichung der Fläche $f(q_1, q_2, q_3) = 0$ aus und integrirt nach diesen beiden Variablen.

Specielle Fälle. 1) Gesetzt, es seien q_1, q_2, q_3 die Coordinaten x, y, z in einem geradlinigen, rechtwinkligen System, so dass $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ ist. In diesem Falle ist: $\omega = 1$,

$$P = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{(vergl. Kin. S. 111)}$$

also:

$$dS = \pm \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Ist die Gleichung der Fläche von der Form $z - F(x, y) = 0$, so wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

Setzt man also $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, so ist:

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \,.\, dx dy,$$

$$S = \int \sqrt{1 + p^2 + q^2} \,.\, dx dy,$$

$$\alpha = \frac{1}{S} \int x \sqrt{1 + p^2 + q^2} \,.\, dx dy,$$

$$\beta = \frac{1}{S} \int y \sqrt{1 + p^2 + q^2} \,.\, dx dy,$$

$$\gamma = \frac{1}{S} \int z \sqrt{1 + p^2 + q^2} \,.\, dx dy;$$

die Integrationen erstrecken sich dabei über den ebenen Flächenraum, welchen die Projection von S auf die Ebene xOy bildet.

Es sei z. B. S ein Flächenraum in einer Ebene

$$z = ax + by + c.$$

In diesem Falle ist $p = a$, $q = b$,

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Diese Grösse ist die Secante des Neigungswinkels der gegebenen Ebene gegen die Ebene xOy; wenn man also diesen Winkel mit α und die Projection von S auf die Ebene xOy mit S' bezeichnet, so wird:

$$S = \sec\alpha \int dx dy = S' \sec\alpha,$$

$$\alpha = \frac{1}{S'} \int x dx dy, \quad \beta = \frac{1}{S'} \int y dx dy, \quad \gamma = \frac{1}{S'} \int z dx dy.$$

Die Ausdrücke für α und β zeigen, dass die Projection des Mittelpunkts der Fläche S der Mittelpunkt ihrer Projection S' ist. Hieraus folgt, dass *die Mittelpunkte der Schnittflächen eines beliebigen Cylinders mit verschiedenen Ebenen auf einer und derselben den Cylinder erzeugenden parallelen Geraden liegen.*

In dem Ausdruck für γ ist $\int z dx dy$ das zwischen S und S' enthaltene Volumen des die Fläche S auf die Ebene xOy projicirenden Cylinders. Dasselbe ist gleich $\gamma S'$. Hieraus lässt sich eine Regel zur Bestimmung des *Volumens eines von irgend zwei Ebenen begrenzten Cylinderstumpfs* ableiten. Dieses Volumen ist nämlich gleich dem Producte des Flächenraums einer zur Erzeugenden senkrechten *Schnittfläche in den Abstand der Mittelpunkte der den Cylinder begrenzenden Flächen.* Daher *ändert sich das Volumen des Cylinders nicht, wenn eine der Schnittflächen um ihren Mittelpunkt rotirt.*

Angenommen, es sei S ein Dreieck und h_1, h_2, h_3 die Abstände seiner Eckpunkte von der Ebene xOy. Dann ist der Mittelpunkt von S derselbe wie der Mittelpunkt dreier gleichen, in den Eckpunkten befindlichen Massen; also ist

$$\gamma = \tfrac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3),$$

folglich

$$\int z dx dy = \frac{h_1 S'}{3} + \frac{h_2 S'}{3} + \frac{h_3 S'}{3}.$$

Dies ist der bekannte Ausdruck für das Volumen eines dreiseitigen geraden Prismas, das durch eine seiner Grundfläche nicht parallele Ebene begrenzt ist.

2) Gesetzt, der Punkt M sei durch seinen Abstand z von der Ebene xOy (Fig. 19) und durch die Polarcoordinaten seiner Projection M' auf diese Ebene. bestimmt, nämlich durch $r = OM'$, $\varphi = M'Ox$; die Gleichung der Fläche S sei von der Form

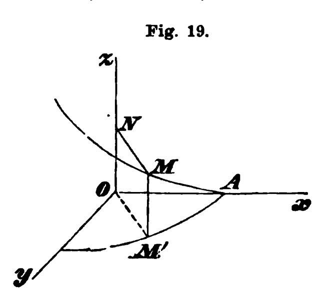


Fig. 19.

$$z - F(r, \varphi) = 0.$$

Setzt man $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, so wird

$$\omega = r, \quad P = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_3} = \frac{\partial f}{\partial z} = 1;$$

also ist:

$$dS = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} r dr d\varphi.$$

Wenden wir diese Formel in Verbindung mit den Formeln (14) auf die windschiefe Schraubenfläche an. Dieselbe wird durch die Bewegung einer Geraden MN erzeugt, welche einer Ebene xOy parallel bleibt und auf zwei Leitlinien gleitet, nämlich auf der Axe Oz und auf einer Schraubenlinie; die letztere sei auf einem geraden Cylinder verzeichnet, dessen Basis ein Kreis in der Ebene xOy vom Mittelpunkt O und vom Halbmesser $OA = R$ ist. Die Gleichung dieser Fläche ist:

$$z = \frac{h}{2\pi}\varphi,$$

wenn h die Ganghöhe des Schraubengewindes bezeichnet. Man hat daher $\frac{\partial z}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{h}{2\pi}$, also:

$$dS = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \cdot dr d\varphi, \quad S = \int \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \cdot dr d\varphi,$$

$$\alpha = \frac{1}{S}\int r \cos\varphi \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dr d\varphi,$$

$$\beta = \frac{1}{S}\int r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dr d\varphi,$$

$$\gamma = \frac{1}{S}\int \frac{h\varphi}{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dr d\varphi.$$

Für den von den Leitlinien ON und AM und den Erzeugenden OA und NM begrenzten Theil der Schraubenfläche findet man:

$$S = \frac{\varphi}{4\pi}\left[R(4\pi^2R^2+h^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{2\pi}\log\left(\frac{2\pi R + (4\pi^2R^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}{h}\right)\right],$$

$$\alpha = \frac{\sin\varphi}{24\pi^3 S}\left[(4\pi^2R^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - h^3\right],$$

$$\beta = \frac{1-\cos\varphi}{24\pi^3 S}\left[(4\pi^2R^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - h^3\right],$$

$$\gamma = \frac{h\varphi^2}{16\pi^2 S}\left[R(4\pi^2R^2+h^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{2\pi}\log\left(\frac{2\pi R + (4\pi^2R^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}{h}\right)\right] = \frac{z}{2}.$$

Setzt man $\varphi = 2\pi$, so erhält man als Coordinaten des Mittelpunkts des einem Schraubenumgang entsprechenden Flächenstückes:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{h}{2}.$$

Nehmen wir ferner an, es sei S ein Theil einer Rotationsoberfläche, Oz die Rotationsaxe, r der Radius des Parallelkreises, auf dem der Punkt M liegt, und

$$z - F(r) = 0$$

die Gleichung der Fläche. In diesem Falle ist $\frac{\partial z}{\partial r} = F'(r)$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$; der Parameter

$$P = \{1 + [F'(r)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ist eine Function des Radius r allein. Setzt man $\pm\{1+[F'(r)]^2\}^{\frac{1}{2}} = \psi(r)$,*) so wird:

$$\begin{aligned} dS &= \psi(r)\, r\, dr\, d\varphi, \\ S &= \int \psi(r)\, r\, dr\, d\varphi, \\ \alpha &= \frac{1}{S}\int r^2\psi(r)\cos\varphi\, dr\, d\varphi, \\ \beta &= \frac{1}{S}\int r^2\psi(r)\sin\varphi\, dr\, d\varphi, \\ \gamma &= \frac{1}{S}\int F(r)\psi(r)\, r\, dr\, d\varphi. \end{aligned} \tag{16}$$

Gesetzt z. B., die Fläche S sei von den beiden den Winkeln 0 und φ entsprechenden Meridianen und zwei Parallelkreisen von den Radien r_0 und r eingeschlossen, so ergiebt sich:

---

*) wobei das Zeichen $+$ für den Fall $dr > 0$, das Zeichen $-$ für $dr < 0$ gilt.

$$
\left.
\begin{aligned}
S &= \varphi\int_{r_0}^{r}\psi(r)r\,dr, \\
\alpha &= \frac{\sin\varphi}{S}\int_{r_0}^{r}\psi(r)r^2dr, \\
\beta &= \frac{1-\cos\varphi}{S}\int_{r_0}^{r}\psi(r)r^2dr, \\
\gamma &= \frac{\varphi}{S}\int_{r_0}^{r}F(r)\psi(r)r\,dr.
\end{aligned}
\right\} \quad (17)
$$

Für einen Rotationskegel, dessen Spitze im Coordinatenursprung O liegt, und dessen Basis den Radius R hat, hat man die Gleichung

$$z - \frac{hr}{R} = 0;$$

folglich wird

$$F'(r) = \frac{h}{R} \quad \text{und} \quad \psi(r) = \sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}},$$

$$S = \tfrac{1}{2}R\varphi\sqrt{h^2+R^2},$$

$$\alpha = \frac{2R\sin\varphi}{3\varphi}, \quad \beta = \frac{2R(1-\cos\varphi)}{3\varphi}, \quad \gamma = \frac{2}{3}h.$$

Man wende ferner die Formeln (17) auf das Rotationsparaboloid und Rotationsellipsoid an.

23. In den Formeln (16) ist $\psi(r)dr$ das Bogendifferential des durch den Punkt (z, r, φ) gehenden Meridians. Bedeutet also s den von dem gegebenen Parallelkreis r_0 beginnenden Bogen des Meridians, so ist $\psi(r)dr = ds$; mithin nimmt die erste der Formeln (17) die Gestalt an:

$$S = \varphi\int_{r_0}^{r} r\,ds.$$

Hierbei ist $\int_{r_0}^{r} r\,ds$ die Summe der Momente der Elemente des Bogens s bezüglich der Rotationsaxe; bezeichnet man daher mit r_1 den Abstand des Mittelpunkts des zwischen den Parallelkreisen von den Radien r_0 und r liegenden Bogens von der Rotationsaxe, so ist

$$sr_1 = \int_{r_0}^{r} r\,ds$$

und daher

$$S = s r_1 \varphi.$$

In diesem Ausdruck ist $r_1 \varphi$ der Kreisbogen, welchen der Massenmittelpunkt des Bogens s bei einer Rotation des Meridians um die Axe Oz um den Winkel φ beschreibt, wenn die Rotation von der ursprünglichen Lage des Meridians, für welche $\varphi = 0$ ist, beginnt. Hieraus ergiebt sich der Satz des Pappus oder die Guldin'sche Regel zur Berechnung von Rotationsflächen:*)

Der durch Rotation eines beliebigen Meridianbogens erzeugte Theil einer Rotationsfläche ist gleich diesem Bogen, multiplicirt mit dem von dessen Mittelpunkte bei der Rotation beschriebenen Wege.

Für eine volle Umdrehung ist $\varphi = 2\pi$. Offenbar gilt der Satz auch, wenn der Bogen s aus verschiedenartigen Curven zusammengesetzt oder wenn er eine geschlossene Curve ist. Daher die Folgerungen: 1) Die durch Rotation einer Kreisfläche um eine in deren Ebene befindliche und den Kreis nicht schneidende Axe erzeugte Ringfläche (Wulst) ist gleich der erzeugenden Kreislinie, multiplicirt mit der von deren Mittelpunkte beschriebenen Kreislinie. 2) Die durch die Rotation eines regelmässigen Polygons um eine in seiner Ebene liegende, das Polygon nicht schneidende Axe erzeugte Oberfläche ist gleich dem Perimeter des Polygons, multiplicirt mit der von seinem Mittelpunkte beschriebenen Kreislinie. 3) Ist der erzeugende Bogen ein Parabelbogen und die Axe der Parabel zugleich Rotationsaxe, so ist (vergl. § 16, Beisp. 1.):

$$s r_1 = \frac{1}{3p}(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} p^2.$$

Multiplicirt man dies mit 2π, so erhält man die Grösse der Oberfläche des Paraboloids, welches durch Rotation des Bogens s um die Parabelaxe entsteht, nämlich:

$$S = \frac{2\pi}{3p}\left[(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right].$$

---

*) Diesen Satz fand Pappus, ein Geometer aus dem IV. Jahrhundert, s. Pappi Alexandrini Math. Collectiones; der Satz heisst die Guldin'sche Regel, weil er nach langer Vergessenheit erst wieder durch das Werk des Guldin: Guldini „De centris gravitatis trium specierum quantitates continuae“ Viennae 1635—1641 bekannt wurde.

Es sei noch bemerkt, dass die Grösse der Rotationsfläche dieselbe bleibt, wenn der erzeugende Bogen seine Lage und Gestalt in der Meridianebene derart ändert, dass die Bogenlänge und der Abstand des Mittelpunkts von der Rotationsaxe unverändert bleiben. Ebenso haben die verschiedenen Rotationsflächen, die durch Rotation eines und desselben Bogens um verschiedene in dessen Ebene liegende und von dessen Mittelpunkte gleichweit entfernte Axen erzeugt sind, dieselbe Oberfläche.

24. *Mittelpunkt eines Theils der Oberfläche eines Ellipsoids mit drei ungleichen Axen.*

Gesetzt, die Coordinaten q_1, q_2, q_3 seien elliptische (s. Kinem. § 56), nämlich $q_1 = \lambda_2$, $q_2 = \lambda_3$, $q_3 = \lambda_1$, und die Fläche S gehöre dem Ellipsoid (λ_1) an. In diesem Falle hat man nach den Formeln der Kinem. Seite 130:

$$dS = \frac{1}{4}(\lambda_2 - \lambda_3)\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(-a_3-\lambda_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(-a_2-\lambda_3)(-a_3-\lambda_3)}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda_2\, d\lambda_3;$$

folglich ist

$$S = \frac{1}{4}\int(\lambda_2 - \lambda_3)\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(-a_3-\lambda_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(-a_2-\lambda_3)(-a_3-\lambda_3)}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda_2\, d\lambda_3,$$

$$\alpha = \frac{1}{4S}\left[\frac{a_1+\lambda_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\right]^{\frac{1}{2}}\int(\lambda_2 - \lambda_3)\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(a_2+\lambda_2)(-a_3-\lambda_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(-a_2-\lambda_3)(-a_3-\lambda_3)}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda_2\, d\lambda_3,$$

$$\beta = \frac{1}{4S}\left[\frac{a_2+\lambda_1}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)}\right]^{\frac{1}{2}}\int(\lambda_2 - \lambda_3)\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(a_1+\lambda_2)(-a_3-\lambda_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(-a_3-\lambda_3)}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda_2\, d\lambda_3,$$

$$\gamma = \frac{1}{4S}\left[\frac{a_3+\lambda_1}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)}\right]^{\frac{1}{2}}\int(\lambda_2 - \lambda_3)\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(-a_2+\lambda_3)}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda_2\, d\lambda_3.$$

Ist die Fläche S nur von Krümmungslinien des Ellipsoids begrenzt, d. h. von Schnittlinien des Ellipsoids mit zwei Coordinatenflächen des Systems (λ_2) und mit zwei Coordinatenflächen des Systems (λ_3), so sind die Grenzen der Integrationen nach λ_2 und λ_3 constant und die Integrationen selbst von einander unabhängig. Sind für diesen Fall λ_2' und λ_2'' die Grenzen für λ_2, ferner λ_3' und λ_3'' die für λ_3, so lassen sich die obigen Integrale in der allgemeinen Form schreiben

$$\int_{\lambda_3'}^{\lambda_3''}\int_{\lambda_2'}^{\lambda_2''}(\lambda_2 - \lambda_3) f_1(\lambda_2) f_2(\lambda_3)\, d\lambda_2\, d\lambda_3;$$

diese geht über in

$$\int_{\lambda_2'}^{\lambda_2''}\lambda_2 f_1(\lambda_2)\, d\lambda_2 \cdot \int_{\lambda_3'}^{\lambda_3''} f_2(\lambda_3)\, d\lambda_3 - \int_{\lambda_2'}^{\lambda_2''} f_1(\lambda_2)\, d\lambda_2 \cdot \int_{\lambda_3'}^{\lambda_3''}\lambda_3 f_2(\lambda_3)\, d\lambda_3,$$

worin sich die Quadraturen durch elliptische Integrale der ersten und zweiten Gattung darstellen lassen. Für jeden zwischen den Hauptdiametralebenen liegenden Theil des Ellipsoids hat man zu setzen: $\lambda_2' = -a_2$, $\lambda_2'' = -a_3$, $\lambda_3' = -a_1$, $\lambda_3'' = -a_2$.

25. Der Satz des Pappus ist in dem folgenden Satze als specieller Fall mit enthalten:

Man denke sich eine bewegliche Ebene P, die bei ihrer Bewegung eine Fläche Q einhüllt; eine in der Ebene liegende, unveränderliche Linie s bleibe immer auf derselben Seite der Geraden A, längs welcher P die Fläche Q berührt; alle Punkte von s sollen zu P orthogonale Trajectorien beschreiben. Der Bogen s erzeugt dabei eine gewisse Fläche. *Der zwischen zwei Lagen der Ebene P liegende Theil S dieser Fläche ist dann gleich dem erzeugenden Bogen s, multiplicirt mit dem von dem Mittelpunkt dieses Bogens zurückgelegten Wege.*

Zum Beweise bezeichnen wir mit Θ die Differentialwinkelverschiebung der Ebene P und mit r den Abstand eines beliebigen Punktes M der Linie s von der Geraden A. Da die unveränderliche Figur keine gleitende Bewegung in der Ebene P hat, so ist die Differentialverschiebung des Punktes M gleich $r\Theta$, also gleich dem Differential des von diesem Punkte beschriebenen Curvenbogens. Multiplicirt man dieselbe mit dem Element ds des erzeugenden Bogens s, so ergiebt sich als Product das Element der Fläche S, d. h.

$$dS = \Theta r ds;$$

folglich ist

$$S = \int \Theta r ds,$$

wobei die Integration sich zunächst über den Bogen s zu erstrecken hat, dann aber über alle Werthe von Θ. Bezeichnet nun r_1 den Abstand des Mittelpunkts des Bogens s von der Geraden A, so ist

$$\int r ds = r_1 s,$$

so dass sich nach Ausführung der ersten Integration ergiebt:

$$S = s \int \Theta r_1.$$

Nun ist aber Θr_1 das Differential des von dem Mittelpunkte des Bogens s beschriebenen Weges; bezeichnet man also den ganzen Weg mit σ, so ist $\int \Theta r_1 = \sigma$; daher ist endlich $S = s\sigma$,

was zu beweisen war. Es sei noch bemerkt, dass der Abstand r_1 des Mittelpunkts C des Bogens s von der Geraden A, welche die Fläche Q erzeugt, der Radius der ersten Krümmung der Trajectorie dieses Punktes ist. Ist die Erzeugende s eine geschlossene Curve, so erzeugt sie eine röhren- oder kanalförmige Fläche.

Es sei z. B. s die Peripherie eines Kreises vom Radius a und σ der Bogen einer Schraubenlinie von der Ganghöhe h auf einem geraden Cylinder, dessen Basis ein Kreis vom Radius R ist. In diesem Falle erzeugt s eine Schraubenröhre. Der einem Schraubenumlauf entsprechende Theil dieser Fläche ist gleich

$$2\pi a\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

Es lässt sich ferner leicht beweisen, dass *das Volumen, welches von der in obiger Weise erzeugten Fläche S eingeschlossen wird, im Falle einer geschlossenen Erzeugenden s gleich ist dem von dieser Curve begrenzten Flächenraume, multiplicirt mit dem vom Mittelpunkte des Flächenraums beschriebenen Wege.*

Ist nämlich u die von der Curve s begrenzte ebene Fläche, V das durch die Bewegung dieser Fläche erzeugte Volumen, du ein Element der Fläche u, das nach zwei Dimensionen unendlich klein ist, r der Abstand eines Punktes dieses Elementes von der Geraden A, so ist $\Theta r du$ das Differentialelement des Volumens V; folglich ist

$$V = \int \Theta r du,$$

wo die Integration sich zuerst über die Fläche u und dann auf alle Werthe von Θ erstreckt. Bedeutet r_1 den Abstand des Massenmittelpunktes der Fläche u von der Geraden A, so hat man

$$\int r du = r_1 u;$$

mithin wird $V = u \int r_1 \Theta$, wo $\int r_1 \Theta$ der vom Mittelpunkt der Fläche u durchlaufene Weg ist. Bezeichnet man denselben mit σ, so erhält man $V = u\sigma$, was die obige Regel beweist. Dabei ist r_1 der Radius der ersten Krümmung der Trajectorie des Mittelpunktes der Fläche u.

In dem obigen Beispiel der Schraubenröhre ist das Volumen der Röhre gleich

$$\pi a^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

Es ist ferner leicht zu sehen, dass, wenn die Masse über die Fläche S derart vertheilt ist, dass die Vertheilung auf dem die Fläche S erzeugenden Bogen s für jede Lage dieses Bogens dieselbe ist, die Masse der ganzen Fläche gleich ist der über den Bogen s vertheilten Masse, multiplicirt mit dem von dem Mittelpunkte dieser Masse durchlaufenen Wege.

Ebenso ist, wenn die in dem Volumen V enthaltene Masse so vertheilt ist, dass die Vertheilung über die Fläche u für jede Lage dieser Ebene dieselbe bleibt, die ganze Masse gleich der der Fläche u, multiplicirt mit dem von dem Mittelpunkte dieser Masse beschriebenen Wege.

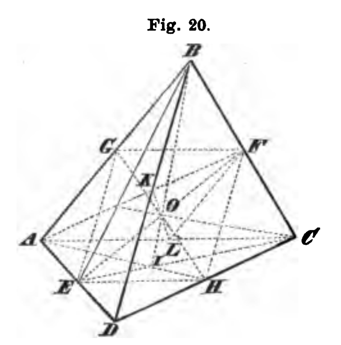
Geht die von den Lagen der Ebene P eingehüllte Fläche Q in eine einzelne Gerade A über, so ist S eine Rotationsfläche; die obige Regel zur Berechnung einer solchen Fläche reducirt sich auf den Satz des Pappus. Das Volumen V ist in diesem Falle gleich der erzeugenden ebenen Fläche u, multiplicirt mit dem von ihrem Mittelpunkte durchlaufenen Kreisbogen σ. Auch dieser Satz ist von Pappus und später von Guldin gegeben worden.

Das Volumen des durch Rotation eines Kreises vom Radius R um die Axe A erzeugten Ringes ist, wenn die Axe A den Abstand a vom Kreismittelpunkt hat, gleich $\pi R^2 . 2\pi a$.

26. *Mittelpunkte für Massen von drei Dimensionen.*

1) *Mittelpunkt eines homogenen Tetraeders* (Fig. 20). Es sei $ABCD$ das homogene Tetraeder. Die durch die Kante AD und die Mitte F der gegenüberliegenden Kante BC gehende Ebene AFD halbirt alle zu BC parallelen und von den Seitenflächen ABD und ACD begrenzten Strecken; sie ist daher eine Symmetrieebene für die Ebenen ABD und ADC; also liegt nach Satz III, § 13 in ihr der Massenmittelpunkt des Tetraeders. Dasselbe gilt von der Ebene BEC, die durch die Kante BC und die Mitte der Kante AB geht; folglich liegt der Massenmittelpunkt des Tetraeders auf der Schnittlinie EF der Ebenen AFD und BEC. *Der Massenmittelpunkt eines*

Fig. 20.



homogenen Tetraeders liegt also auf der Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberliegenden Kanten.

Sind nun G, H, K, L die Mitten der Kanten AB, DC, BD, AC, so gehen die Geraden GH und KL ebenfalls durch den Mittelpunkt des Tetraeders; mithin schneiden sich die drei Geraden EF, GH, KL alle in einem Punkte, welcher der Mittelpunkt des Tetraeders ist.

Man überzeugt sich leicht, dass diese drei Geraden im Punkte O halbirt werden. Zieht man nämlich die Geraden GF, FH, HE, EG, so erhält man ein Parallelogramm $EFGH$, in dem die Geraden FE und GH Diagonalen sind, sich also halbiren.

Aus § 14 folgt, dass O der Mittelpunkt von vier gleichen Massen ist, deren Mittelpunkte in den Ecken des Tetraeders $ABCD$ liegen. Die Ebenen ABH und BEC schneiden sich in der durch den Punkt O gehenden Geraden BJ. Der Schnittpunkt J dieser Geraden mit der Seitenfläche ADC ist deren Mittelpunkt; denn er ist der Schnittpunkt der Verbindungslinien AH und EC zweier Ecken mit den Mitten der Gegenseiten. Da O die Strecke EF halbirt, so ist der Abstand des Punktes O von der Ebene ACD halb so gross, als der Abstand des Punktes F von derselben Ebene; der Punkt F ist aber halb so weit von der Ebene ADC entfernt, als der Punkt B, denn F halbirt die Kante BC. Folglich ist der Abstand des Punktes O von der Ebene ACD der vierte Theil des Abstands des Punktes B von jener Ebene; d. h. $OJ = \frac{1}{4}BJ$ und $BO = \frac{3}{4}BJ$. *Der Mittelpunkt des Tetraeders liegt also auf der Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seitenfläche und ist von der Ecke um drei Viertel dieser Verbindungsstrecke entfernt.*

Es ist noch zu bemerken, dass O der Mittelpunkt derjenigen Dreiecksfläche ist, die man erhält, wenn man das Tetraeder durch eine der Seite ADC parallele und von der Ecke B um $\frac{3}{4}$ der von B auf ADC gefällten Höhe abstehenden Ebene schneidet. Man kann daher sagen, dass der *Massenmittelpunkt einer dreikantigen Pyramide der Mittelpunkt der Schnittfläche der Pyramide mit einer der Basis parallelen Ebene ist, die von der Spitze um $\frac{3}{4}$ der Höhe absteht.*

Diese Regel gilt auch für jede vielkantige Pyramide P. Zerlegt man nämlich eine solche Pyramide in die Tetraeder T, T', T'', . . . durch Ebenen, die durch eine Seitenkante und die übrigen Kanten gehen, und legt man dann parallel der Basis eine Ebene in einem Abstande von der Spitze gleich $\frac{3}{4}$ der Höhe, so erhält man als Schnittflächen dieser Ebene mit den Tetraedern Dreiecke, deren Mittelpunkte die Mittelpunkte der Tetraeder sind; daher fällt der Mittelpunkt der Pyramide P mit demjenigen der Fläche des Systems dieser Dreiecke zusammen, d. h. mit dem Mittelpunkte der Fläche desjenigen Polygons, welches diese Dreiecke bilden.

Dieselbe Regel gilt auch für jeden Kegel, da man den Kegel als eine Pyramide mit unendlich kleinen Seitenflächen ansehen kann.

2) *Mittelpunkt eines homogenen Polyeders.* Nachdem die Construction des Mittelpunktes des homogenen Tetraeders gefunden ist, lässt sich der Mittelpunkt des Volumens jedes Polyeders bestimmen, indem man das Polyeder in Tetraeder zerlegt und ein System von Punkten betrachtet, deren Massen denen der Tetraeder gleich sind.

Es seien $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$, $(x_4 y_4 z_4)$ die rechtwinkligen geradlinigen Coordinaten der Eckpunkte eines der Tetraeder und α, β, γ die Coordinaten seines Mittelpunkts. Da der letztere als Mittelpunkt von vier gleichen Massen angesehen werden kann, deren Mittelpunkte in den Tetraederecken liegen, so ist:

$$\alpha = \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$
$$\beta = \tfrac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4),$$
$$\gamma = \tfrac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4).$$

Das Volumen oder die Masse des Tetraeders ist durch die Determinante

$$\pm \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3, & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4, & y_1 - y_4, & z_1 - z_4 \end{vmatrix}$$

dargestellt, wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist.

Somit kann man die Mittelpunktscoordinaten und die Masse jedes einzelnen Tetraeders und dann nach den Formeln (3) § 13 die Mittelpunktscoordinaten des ganzen Polyeders berechnen.

27. *Allgemeine Formeln zur Bestimmung des Mittelpunktes einer continuirlichen Masse von drei Dimensionen.*

Es sei: m die Masse, V ihr Volumen, x, y, z die geradlinigen Coordinaten des nach drei Dimensionen unendlich kleinen Elements dm, ϱ die Dichtigkeit desselben, dV sein Volumen und α, β, γ die Coordinaten des Mittelpunktes der ganzen Masse m.

Nach der Formel für die Berechnung einer räumlichen Masse und nach den Formeln (4) § 13 hat man

$$m = \int \varrho dV, \; \alpha = \frac{1}{m}\int x\varrho dV, \; \beta = \frac{1}{m}\int y\varrho dV, \; \gamma = \frac{1}{m}\int z\varrho dV, \tag{18}$$

wobei die Integrationen sich über das ganze Volumen erstrecken.

Im Falle einer homogenen Masse ist die Dichtigkeit ϱ constant, und die Coordinaten des Massenmittelpunkts sind:

$$\alpha = \frac{1}{V}\int x dV, \; \beta = \frac{1}{V}\int y dV, \; \gamma = \frac{1}{V}\int z dV. \tag{19}$$

Um die Integration über das Volumen V wirklich auszuführen, muss man die unter dem Integralzeichen stehenden Grössen

als Functionen von x, y, z oder von anderen, im allgemeinen krummlinigen Coordinaten q_1, q_2, q_3 ausdrücken, wie dies in § 3 gezeigt wurde, und dann der Reihe nach nach diesen Variablen integriren.

Specielle Fälle. 1) Für das Volumenelement ergiebt sich in rechtwinkligen geradlinigen Coordinaten x, y, z die Formel:

$$dV = dxdydz\,;$$

folglich wird:

$$m = \int \varrho dxdydz\,, \tag{20}$$

$$\alpha = \frac{1}{m}\int x\varrho dxdydz\,,\ \beta = \frac{1}{m}\int y\varrho dxdydz\,,\ \gamma = \frac{1}{m}\int z\varrho dxdydz,$$

und wenn ϱ constant ist

$$\alpha = \frac{1}{V}\int xdxdydz,\ \beta = \frac{1}{V}\int ydxdydz,\ \gamma = \frac{1}{V}\int zdxdydz, \tag{21}$$

mit

$$V = \int dxdydz.$$

Mit Hilfe der Formel (15) § 6 lassen sich diese Integrale auf solche, die über die Oberfläche S des Volumens V ausgedehnt sind, zurückführen. Die Formeln (21) gehen dann über in:

$$V = \int z \cos(nz)\, dS \tag{22}$$

$$\alpha = \frac{1}{V}\int xz\cos(nz)dS,\ \beta = \frac{1}{V}\int yz\cos(nz)dS,\ \gamma = \frac{1}{2V}\int z^2\cos(nz)dS$$

worin n die Richtung der äusseren Normale der Fläche S im Punkte (x, y, z) bedeutet.

Bei Anwendung dieser Formeln auf die einzelnen Theile der Oberfläche hat man $\cos(nz)dS = +\, dxdy$ oder $= -\, dxdy$ zu setzen, je nachdem eine der Axe Oz parallele, im Sinne $\Delta z > 0$ gerichtete Gerade durch den Punkt (x, y, z) aus dem Volumen V aus- oder in dasselbe eintritt.

Es sei z. B. V das Volumen eines geraden Cylinders, dessen Basis A in der Ebene xOy liegt, dessen Erzeugende der Axe Oz parallel sind und der von einer Fläche begrenzt ist, deren Gleichung $z = f(x, y)$ sei.

Die Elemente der Integrale (22) verschwinden für die Basis A, denn für jeden Punkt derselben ist $z = 0$. Die auf die Mantelfläche bezüglichen Elemente verschwinden gleichfalls, weil für sie $\cos(nz) = 0$ ist. Es bleiben also nur diejenigen Elemente, die sich auf den innerhalb des Cylinders enthaltenen Theil der begrenzenden Fläche beziehen. Wir wollen dieses Flächenstück die obere Basis nennen, indem wir uns die Axe Oz vertical denken und annehmen, dass innerhalb des Cylinders

alle Werthe von z positiv sind. Da alle der Axe Oz parallelen und im Sinne $\Delta z > 0$ gerichteten Geraden aus dem Volumen durch die Punkte der oberen Basis austreten, so ist $\cos(nz)dS = dxdy$ zu setzen. Es wird also

$$V = \int z dx dy,$$

$$\alpha = \frac{1}{V}\int xz dx dy, \quad \beta = \frac{1}{V}\int yz dx dy, \quad \gamma = \frac{1}{2V}\int z^2 dx dy; \tag{23}$$

hier ist nun noch $x = f(x, y)$ einzusetzen und dann nach x und y zu integriren, und zwar über den Flächenraum der unteren Basis A.

Nehmen wir z. B. an, die obere Basis S sei eine Ebene.

Nach §. 22 ist der Mittelpunkt der ebenen Fläche A die Projection des Mittelpunktes der ebenen Fläche der oberen Basis S auf die Ebene xOy, und das Volumen V ist gleich der Fläche A, multiplicirt mit dem Abstand des Mittelpunktes der Fläche S von ihr. Bezeichnet man diesen Abstand mit c und nimmt den Mittelpunkt der Fläche A als Coordinatenursprung, so kann man die Gleichung der den Cylinder oberhalb begrenzenden Ebene in der Form schreiben:

$$z = ax + by + c.$$

Substituirt man diesen Werth von z in die Formeln (23), so folgt:

$$\alpha = \frac{1}{V}\int (ax^2 + bxy) dx dy,$$

$$\beta = \frac{1}{V}\int (axy + by^2) dx dy,$$

$$\gamma = \frac{1}{2V}\int (a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + c^2) dx dy,$$

wobei $V = Ac$ ist. Es bleiben also die über die Fläche A ausgedehnten Integrale

$$\int x^2 dx dy, \int y^2 dx dy, \int xy dx dy$$

zu berechnen. Zwischen den Grössen α, β, γ besteht die Gleichung

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(a\alpha + b\beta + c^2);$$

dieselbe zeigt, dass der Massenmittelpunkt des Cylinders in einer Ebene liegt, die durch die Mitten aller z-Coordinaten, die zu den Punkten der oberen Basis gehören, geht.

Gesetzt, die Basis A sei ein Rechteck, dessen Seiten den Axen Ox und Oy parallel verlaufen; es sei die der Axe Ox parallele Seite gleich p, die der Axe Oy parallele gleich q. Man hat dann

$$\int x^2 dx dy = \frac{p^3 q}{12}, \int y^2 dx dy = \frac{pq^3}{12}, \int xy dx dy = 0;$$

folglich ist:

$$\alpha = \frac{a}{12c}p^2, \quad \beta = \frac{b}{12c}q^2, \quad \gamma = \frac{1}{24c}(a^2p^2 + b^2q^2 + 12c^2).$$

Ist A ein Kreis vom Radius r, so wird:

$$\alpha = \frac{ar^2}{4c}, \ \beta = \frac{br^2}{4c}, \ \gamma = \frac{1}{8c}\left[(a^2 + b^2) r^2 + 4c^2)\right].$$

2) Gesetzt der Punkt M (x, y, z) sei durch Polarcoordinaten bestimmt, und zwar sei $OM = r$, $zOM = \varphi$ und ψ der Winkel der Ebenen zOM und zOx. Dann ist:

$$x = r \sin\varphi \cos\psi; \ y = r \sin\varphi \sin\psi, \ z = r \cos\varphi,$$

$$dV = r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\psi,$$

$$\begin{aligned} V &= \int r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\psi, \quad m = \int \varrho r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\psi, \\ \alpha &= \frac{1}{m}\int \varrho r^3 \sin^2\varphi \cos\psi dr d\varphi d\psi, \\ \beta &= \frac{1}{m}\int \varrho r^3 \sin^2\varphi \sin\psi dr d\varphi d\psi, \\ \gamma &= \frac{1}{m}\int \varrho r^3 \sin\varphi \cos\varphi dr d\varphi d\psi. \end{aligned} \tag{24}$$

Indem wir hierin zuerst die Integration nach r ausführen, wodurch sich zwei Functionen P und Q ergeben, die den Bedingungen

$$\varrho r^2 = \frac{\partial P}{\partial r}, \ \varrho r^3 = \frac{\partial Q}{\partial r}$$

genügen, wenden wir auf die Integrale (24) die Formel (16) § 6 an und erhalten:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\int r \cos(nr) dS, \quad m = \int \frac{P}{r^2} \cos(nr) dS, \\ \alpha &= \frac{1}{m}\int \frac{Q}{r^2} \sin\varphi \cos\psi \cos(nr) dS, \\ \beta &= \frac{1}{m}\int \frac{Q}{r^2} \sin\varphi \sin\psi \cos(nr) dS, \\ \gamma &= \frac{1}{m}\int \frac{Q}{r^2} \cos\varphi \cos(nr) dS; \end{aligned} \tag{25}$$

diese Integrale sind über die ganze Oberfläche S des Volumens V auszudehnen.

Für denjenigen Theil der Oberfläche, durch welchen der Radiusvector r aus dem Volumen austritt, hat man zu setzen

$$\cos(nr) dS = r^2 \sin\varphi d\varphi d\psi;$$

für den aber, durch welchen r in das Volumen eintritt, ist

$$\cos(nr) dS = - r^2 \sin\varphi d\varphi d\psi.$$

Man stellt nun den Radiusvector r für jeden Theil der Oberfläche als Function von φ und ψ dar und führt dann die Integration nach diesen Variablen aus. Liegt der Pol innerhalb des Volumens V oder auf seiner Oberfläche, so ist zu beachten, dass man für die auf diesen Punkt bezüglichen Theile der Integrale denselben als Eintrittspunkt des Radiusvectors anzusehen hat.

Wenden wir diese Formeln auf einen Kegel an, dessen Spitze in O liegt und der durch eine beliebige Fläche

$$F(r, \varphi, \psi) = 0 \tag{a}$$

begrenzt ist. Für die Mantelfläche ist $\cos(nr) = 0$, so dass in den Integralen (25) nur die Theile verbleiben, die sich auf Punkte der begrenzenden Fläche und auf die Spitze des Kegels beziehen.

In dem ersten jener Integrale verschwindet der auf die Spitze bezügliche Theil, da dasselbe für $r = 0$ zu Null wird; in den übrigen Integralen reducirt sich dieser Theil auf die folgenden Ausdrücke

$$-\int P_0 \sin\varphi d\varphi d\psi ,$$
$$-\int Q_0 \sin^2\varphi \cos\psi d\varphi d\psi , \quad -\int Q_0 \sin^2\varphi \sin\psi d\varphi d\psi ,$$
$$-\int Q_0 \cos\varphi \sin\varphi d\varphi d\psi ,$$

wo P_0 und Q_0 die Werthe von P und Q für $r = 0$ sind. Diese Grössen verschwinden, wenn $P_0 = 0$ und $Q_0 = 0$ sind, was unter anderem eintritt, wenn die Dichtigkeit ϱ constant ist, weil dann

$$P = \varrho \frac{r^3}{3}, \quad Q = \varrho \frac{r^4}{4}$$

ist; in diesem Falle einer homogenen Masse hat man also:

$$m = \frac{\varrho}{3}\int r \cos(nr) dS ,$$

$$\alpha = \frac{\varrho}{4m}\int r^2 \sin\varphi \cos\psi \cos(nr) dS ,$$

$$\beta = \frac{\varrho}{4m}\int r^2 \sin\varphi \sin\psi \cos(nr) dS ,$$

$$\gamma = \frac{\varrho}{4m}\int r^2 \cos\varphi \cos(nr) dS ,$$

wo die Integration sich nur über die begrenzende Fläche (a) erstreckt.

Trifft der Radiusvector die begrenzende Fläche nur in je einem Punkte, so muss man setzen:

$$\cos(nr) dS = r^2 \sin\varphi d\varphi d\psi ;$$

dadurch nehmen die Formeln die Gestalt an:

$$m = \frac{\varrho}{3}\int r^3 \sin\varphi d\varphi d\psi,$$
$$\alpha = \frac{\varrho}{4m}\int r^4 \sin^2\varphi \cos\psi d\varphi d\psi,$$
$$\beta = \frac{\varrho}{4m}\int r^4 \sin^2\varphi \sin\psi d\varphi d\psi,$$
$$\gamma = \frac{\varrho}{4m}\int r^4 \cos\varphi \sin\varphi d\varphi d\psi;$$

hier ist noch für r sein Ausdruck, den man aus Gleichung (a) erhält, zu setzen und dann nach φ und ψ zu integriren.

Betrachten wir endlich den Specialfall, dass $P_0 = 0$ und $Q_0 = 0$, die Dichtigkeit ϱ eine Function des Radiusvectors allein und die begrenzende Fläche (a) eine Kugel ist, deren Mittelpunkt in O liegt. Man hat dann:

$$\begin{aligned} m &= P\int \sin\varphi d\varphi d\psi, \\ \alpha &= \frac{Q}{m}\int \sin^2\varphi \cos\psi d\varphi d\psi, \\ \beta &= \frac{Q}{m}\int \sin^2\varphi \sin\psi d\varphi d\psi, \\ \gamma &= \frac{Q}{m}\int \cos\varphi \sin\varphi d\varphi d\psi. \end{aligned} \tag{26}$$

Für einen Kegel z. B., der durch Rotation einer den Winkel φ mit der Axe Oz bildenden Geraden um diese Axe erzeugt ist, ergeben jene Gleichungen:

$$m = 2\pi P(1 - \cos\varphi), \ \alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = \frac{Q}{P}\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Für eine homogene Masse ist:

$$P = \varrho\frac{r^3}{3}, \quad Q = \varrho\frac{r^4}{4} \text{ und folglich } \gamma = \frac{3r}{4}\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Für die Halbkugel hat man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu setzen; dann wird $\gamma = \frac{3}{8}r$.

Wir empfehlen, die Formeln (26) auf eine körperliche Ecke anzuwenden, die durch eine Kugel begrenzt wird; dabei sind die Integrationen über die Fläche eines sphärischen Dreiecks auszudehnen.

28. Es kommt häufig vor, dass man die Masse m in Differentialelemente dm mit einer oder zwei *endlichen* Dimensionen zerlegen, dann die Coordinaten x, y, z des Mittelpunktes eines solchen Elements bestimmen und endlich die Coordinaten des Mittelpunktes der ganzen Masse m nach den folgenden Formeln berechnen kann:

$$\alpha = \frac{1}{m}\int x\,dm\,,\ \beta = \frac{1}{m}\int y\,dm\,,\ \gamma = \frac{1}{m}\int z\,dm. \tag{27}$$

Hat dm zwei unendlich kleine Dimensionen, so sind α, β, γ die Coordinaten des Mittelpunktes einer Masse m, die über eine gewisse Fläche vertheilt ist, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Elemente dm ist. Hat aber dm nur eine unendlich kleine Dimension, so sind α, β, γ die Coordinaten des Mittelpunktes einer Masse m, die längs der Linie vertheilt ist, auf welcher die Mittelpunkte aller Elemente dm liegen.

Beispiele. 1) Die Masse m sei in einem geraden Cylinder enthalten, dessen Basis A in der Ebene xOy liegt und dessen Erzeugende der Axe Oz parallel sind; dieser Cylinder sei durch eine Fläche $z = f(x, y)$ begrenzt und die Dichtigkeit ϱ sei von der Coordinate z unabhängig, d. h. es sei ϱ entweder constant oder eine Function von x und y allein.

Bedeutet nun dA ein nach zwei Dimensionen unendlich kleines Element der ebenen Fläche A, das den Punkt (x, y) enthält, so kann man das ganze Volumen der Masse m als die Summe oder das Integral der unendlich kleinen Cylinder $z\,dA$ betrachten; die in einem solchen Cylinder enthaltene Masse ist dann homogen, und zwar von der dem Flächentheilchen dA zukommenden Dichtigkeit ϱ. Man kann also setzen:

$$dm = \varrho z\,dA.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes einer solchen Masse sind x, y, $\frac{1}{2}z$; folglich ergeben die Formeln (27)

$$\alpha = \frac{1}{m}\int x\varrho z\,dA\,,\ \beta = \frac{1}{m}\int y\varrho z\,dA\,,\ \gamma = \frac{1}{2m}\int z^2\varrho\,dA\,, \tag{28}$$

wo $m = \int \varrho z\,dA$ und $z = f(x, y)$ und die Integration über die ebene Fläche A auszudehnen ist. Dieselben Resultate lassen sich auch aus der allgemeinen Formel zur Reduction der Integration über ein Volumen auf eine Integration über eine Fläche ableiten.

Ist die Dichtigkeit ϱ constant, so gehen die Formeln (28) in die Formeln (23) über. Man wende die Formeln (28) auf den Fall an, dass die begrenzende Fläche eine Kugel vom Radius $OB = R$, die Cylinderbasis A ein Kreis vom Durchmesser OB und die Dichtigkeit ϱ eine Function des vom Punkte O nach dem betreffenden Punkte gezogenen Radiusvectors r allein ist (vgl. S. 43 Fig. 17).

2) Die geradlinigen Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz seien conjugirte Durchmesser des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ ;$$

die Dichtigkeit ϱ sei eine Function der Coordinate x allein und m sei

die Masse eines zwischen zwei der Ebene yOz parallelen Ebenen liegenden Ellipsoidabschnittes.

Man kann diese Masse m durch Ebenen parallel yOz in unendlich kleine Elemente von einer unendlich kleinen Dimension zerlegen, deren Mittelpunkte auf der Axe Ox liegen; daher lässt sich m als eine über diese Axe vertheilte Masse ansehen.

Ein der Ebene yOz paralleler Schnitt giebt eine dem Centralschnitt

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ähnliche Ellipse. Die zu Oy und Oz parallelen conjugirten Semidiameter derselben sind:

$$b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \; c\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Multiplicirt man ihr Product mit $\pi \sin(yz)$, so erhält man den Flächeninhalt der Ellipse. Diese Fläche kann man als Basis eines Cylinders dV ansehen, dessen Höhe die Projection von dx auf die Normale der Ebene yOz ist; bezeichnet also h die Richtung dieser Normale, so ist:

$$dV = \pi bc \sin(yz) \cos(hx) \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx. \tag{b}$$

Da die Dichtigkeit ϱ eine Function der Coordinate x allein ist, so ist sie für alle Punkte dieses Volumenelements dieselbe; mithin ist der Mittelpunkt der in diesem Volumenelement enthaltenen Masse dm der Mittelpunkt der Basis und liegt auf der Axe Ox. Setzt man zur Abkürzung

$$\pi bc \sin(yz) \cos(hx) = A,$$

so ist

$$dm = A\varrho\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx,$$

$$m = A\int \varrho\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx, \; \beta = 0, \; \gamma = 0$$

und

$$\alpha = \frac{\int x\varrho\,(a^2 - x^2)\,dx}{\int \varrho\,(a^2 - x^2)\,dx},$$

wo die Grenzen der Integration die Werthe von x für die die Masse m begrenzenden Ebenen sind.

Es ist bemerkenswerth, dass dieser Ausdruck für α, also die Lage des Massenmittelpunktes auf der Axe Ox weder von den Winkeln der conjugirten Durchmesser Ox, Oy, Oz, noch von der Grösse der Semidiameter b und c abhängt.

Im Falle einer homogenen Masse verschwindet die Dichtigkeit ϱ aus dem Ausdruck für α, d. h. es wird:

$$\alpha = \frac{\int x (a^2 - x^2)\, dx}{\int (a^2 - x^2)\, dx}.$$

Für das halbe Ellipsoid hat man von 0 bis a zu integriren. Der Abstand des Mittelpunktes des homogenen halben Ellipsoids vom Centrum des Ellipsoids ist $\alpha = \frac{3}{8}\, a$.

Bedeuten α_1, α_2, α_3 die Cosinus der Winkel zwischen den conjugirten Diametern a, b, c, so hat man (vgl. Kinematik Cap. VIII S. 149, Formel (7))

$$\sin (yz) \cos (hx) = \varDelta^{\frac{1}{2}},$$

wo $\varDelta = 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ ist; aus Formel (b) ergiebt sich hiermit:

$$dV = \pi b c \varDelta^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx;$$

man erhält hieraus den Ausdruck für das Volumen des ganzen Ellipsoids:

$$\pi b c \varDelta^{\frac{1}{2}} \int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\, \pi a b c \varDelta^{\frac{1}{2}}.$$

Sind a, b, c die conjugirten Hauptsemidiameter, so ist $\varDelta = 1$, und das Volumen des Ellipsoids wird $= \frac{4}{3}\, \pi a b c$.

3) Die Masse m sei durch eine Rotationsfläche und zwei zur Rotationsaxe senkrechte Ebenen begrenzt. Eine solche Masse lässt sich durch Ebenen senkrecht zur Rotationsaxe in Elemente zerlegen, die nach einer Dimension unendlich klein sind und die Form von Cylindern haben, deren Grundflächen Parallelkreise und deren Höhen unendlich kleine Abschnitte auf der Rotationsaxe sind. Ist die Dichtigkeit ϱ für alle Punkte eines Parallelkreises dieselbe, oder hängt sie nur von dem Abstand des Punktes von der Rotationsaxe ab, so liegt der Mittelpunkt der Masse jedes Elementes auf dieser Axe. Daher kann man dann m als eine über die Rotationsaxe vertheilte Masse ansehen.

Es sei nun z der Abstand des Mittelpunktes eines beliebigen Parallelkreises von einem auf der Rotationsaxe gewählten festen Punkte O, r der Abstand eines Punktes M von jener Axe und φ der Winkel, welchen die durch M und die Rotationsaxe gehende Ebene mit einer andern durch die Axe gelegten festen Ebene bildet. Für das Element der Masse m mit drei unendlich kleinen Dimensionen hat man den Ausdruck $\varrho r dr d\varphi dz$. Ist ϱ eine Function von r allein und integrirt man nach r von 0 bis zu demjenigen Werthe von r, der dem Radius des Parallelkreises gleich ist, in dessen Ebene der Punkt M liegt, dann aber nach φ von 0 bis 2π, so ergiebt sich für das Massenelement mit einer unendlich kleinen Dimension:

$$dm = 2\pi dz \int_0^r \varrho r dr;$$

der Mittelpunkt dieses Elements liegt auf der Rotationsaxe. Hat man das Integral $\int\limits_0^r \varrho r d r$ gefunden, so kann man darin den Radius r mit Hilfe der Gleichung der Rotationsfläche als Function der Coordinate z ausdrücken. So erhält man statt des Integrals eine gewisse Function $f(z)$ von nur einer Variablen z; folglich wird

$$dm = 2\pi f(z) dz\,, \quad m = 2\pi \int\limits_{z_0}^{z} f(z) dz\,,$$

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma = \frac{2\pi}{m} \int\limits_{z_0}^{z} z f(z) dz\,,$$

wo z_0 und z die Abstände der Mittelpunkte der die Masse m begrenzenden Parallelkreise vom Punkte O sind.

Setzt man z. B. $\varrho = r^2$, und ist die Gleichung der Rotationsfläche $r^2 = 2pz$, d. h. ist diese Fläche ein Rotationsparaboloid, so erhält man:

$$m = 2\pi \frac{(2p)^2}{4} \int\limits_{z_0}^{z} z^2 dz = \frac{2\pi (2p)^2}{12} (z^3 - z_0^3)\,,$$

$$\gamma = \frac{3}{4} \cdot \frac{(z^4 - z_0^4)}{(z^3 - z_0^3)}.$$

4) Wenden wir endlich die Formeln (27) auf die Masse eines Kegels an, dessen Spitze in O liegt und der durch zwei der Ebene xOy parallele Ebenen begrenzt ist. Es sei A die ebene Fläche des von der Spitze O am meisten entfernten, B die des nächsten und u die eines beliebigen zwischen A und B liegenden Schnittes; es seien ferner a, b, z die Abstände dieser drei Schnittflächen von der Spitze, $M(x, y, z)$ ein Punkt der Fläche u, μ der Schnittpunkt der Geraden OM mit der Ebene A, ξ, η die den Axen Ox und Oy parallelen Coordinaten des Punktes μ und dA ein den Punkt μ enthaltendes Element der Fläche A von zwei unendlich kleinen Dimensionen. Man sieht nun leicht, dass $x = \frac{z}{a} \xi$, $y = \frac{z}{a} \eta$, und dass das den Punkt M enthaltende Element der Fläche u

$$du = \frac{z^2}{a^2} dA$$

ist. Multiplicirt man dasselbe mit dz und mit der Dichtigkeit ϱ, so erhält man das Massenelement

$$dm = \varrho \frac{z^2}{a^2} dA dz.$$

Ist δ die Dichtigkeit im Punkte μ und nimmt man an, dieselbe sei eine

Function der Coordinaten ξ und η, so drückt sich die Dichtigkeit im Punkte M durch eine Function von der Form

$$\varrho = \delta f(z)$$

aus; man hat dann

$$dm = \frac{\delta z^2}{a^2} f(z)\, dz\, dA.$$

Integrirt man nun nach ξ und η über die Fläche A, so erhält man für die in dem Volumen $u dz$ enthaltene Masse den Ausdruck:

$$\frac{z^2}{a^2} f(z)\, dz \int \delta\, dA.$$

Hierin ist $\int \delta\, dA$ eine über die Fläche A vertheilte Masse; bezeichnet man sie mit M, so ergiebt sich für die in dem Volumen $u dz$ enthaltene Masse der Ausdruck:

$$M \frac{z^2}{a^2} f(z)\, dz. \qquad (c)$$

Die Momente dieser Masse bezüglich der Ebenen yOz und xOz stellen sich als die Integrale

$$\int x \varrho\, dV = f(z) \frac{z^3}{a^3}\, dz \int \xi \delta\, dA,$$

$$\int y \varrho\, dV = f(z) \frac{z^3}{a^3}\, dz \int \eta \delta\, dA$$

dar, die über die Fläche A auszudehnen sind. Bedeuten p und q die Coordinaten des Mittelpunktes der Masse M, so ist

$$\int \xi \delta\, dA = Mp, \quad \int \eta \delta\, dA = Mq,$$

also wird:

$$\int x \varrho\, dV = Mp f(z) \frac{z^3}{a^3}\, dz, \quad \int y \varrho\, dV = Mq f(z) \frac{z^3}{a^3}\, dz.$$

Sind andererseits x' und y' die den Axen Ox, Oy parallelen Coordinaten des Mittelpunktes der in dem Volumen $u dz$ enthaltenen Masse, so wird:

$$\int x \varrho\, dV = x' M \frac{z^2}{a^2} f(z)\, dz, \quad \int y \varrho\, dV = y' M \frac{z^2}{a^2} f(z)\, dz.$$

Aus der Gleichheit dieser Ausdrücke mit den vorhergehenden folgt:

$$x' = \frac{z}{a} p, \quad y' = \frac{z}{a} q.$$

Dies zeigt, dass, wenn man die Masse m durch Ebenen, die der Basis A des Kegels parallel sind, in Elemente von einer unendlich kleinen Dimension zerlegt, man Elemente erhält, deren Mittelpunkte auf der Verbindungslinie der Spitze O des Kegels mit dem Mittelpunkte der über die Basisfläche A vertheilten Masse liegen. Man kann daher m als eine über diese Gerade vertheilte Masse ansehen.

Nach Berechnung der Coordinaten p und q der über die Fläche A vertheilten Masse M ergiebt sich

$$\alpha = \frac{\gamma}{a} p, \; \beta = \frac{\gamma}{a} q.$$

Es bleibt nun noch γ zu bestimmen. Nach den Formeln (27) und (c) erhält man:

$$m = \frac{M}{a^2} \int_b^a f(z) z^2 dz,$$

$$\gamma = \frac{M}{m a^2} \int_b^a f(z) z^3 dz = \frac{\int_b^a f(z) z^3 dz}{\int_b^a f(z) z^2 dz}.$$

In dem speciellen Falle, dass $f(z)$ eine Constante c ist, d. h. wenn die Dichtigkeit ϱ für alle Punkte einer durch die Spitze des Kegels gehenden Geraden dieselbe ist, findet man:

$$\gamma = \frac{\int_b^a z^3 dz}{\int_b^a z^2 dz} = \frac{3\,(a^4 - b^4)}{4\,(a^3 - b^3)} = \frac{3\,(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3)}{4\,(a^2 + ab + b^2)}.$$

Für den ganzen Kegel hat man $b = 0$ zu setzen. Dann wird $\gamma = \frac{3}{4} a$, was mit dem übereinstimmt, was in § 26 gefunden wurde.

29. Wir haben in § 10, Formel (21), gesehen, dass

$$\overline{R}\,(m + m' + m'' + \ldots) = m\overline{r} + m'\overline{r'} + m''\overline{r''} + \ldots,$$

d. h. dass das polare Moment ersten Grades von der Summe der Massen $m, m', m'', \ldots$ bezüglich eines beliebigen Poles O gleich der Summe der polaren Momente ersten Grades der einzelnen Massen bezüglich desselben Pols ist. Dies liefert uns eine graphische Construction für den Abstand $\overline{R}$ des Mittelpunktes C eines Massensystems von dem Pole O; dieselbe besteht in folgendem. Man bilde die geometrische Summe der die polaren Momente darstellenden Strecken, indem man sich diese Momente auf den Richtungen der Radienvectoren $r, r', r'', \ldots$, die nach den Mittelpunkten der Massen $m, m', m'', \ldots$ hinführen, vom Pole O aus aufgetragen denkt; die so gebildete Summe dividire man durch die Summe der Massen.

Auch kann man jenen Abstand mit Hilfe der Abstände der Massenmittelpunkte vom Pol und der gegenseitigen Ab-

stände dieser Mittelpunkte von einander berechnen. Die Formel (21) § 10 giebt nämlich:

$$R^2.(\Sigma m)^2 = m^2r^2 + m'^2r'^2 + \cdots + 2mm'\overline{rr'} + 2mm''\overline{rr''} + \\ + 2m'm''\overline{r'r''} + \cdots.$$

Bezeichnen nun ϱ, ϱ', ϱ'', ... die Abstände der Masse m von m', m von m'', m' von m'', ..., so ist:

$$2\overline{rr'} = r^2 + r'^2 - \varrho^2,\ 2\overline{rr''} = r^2 + r''^2 - \varrho'^2, \cdots;$$

daher kann man die vorhergehende Formel schreiben

$$R^2(\Sigma m)^2 = m(mr^2 + m'r'^2 + \cdots) + m'(mr^2 + m'r'^2 + \cdots) + \\ + \cdots - mm'\varrho^2 - mm''\varrho'^2 - \cdots,$$

oder auch kurz in der Form

$$R^2(\Sigma m)^2 = \Sigma m \cdot \Sigma mr^2 - \Sigma mm'\varrho^2,$$

wenn Σmr^2 die Summe aller Massen, jede multiplicirt mit dem Quadrat des Abstandes ihres Mittelpunktes von dem Pol, $\Sigma mm'\varrho^2$ aber die Summe der Producte von je zwei Massen mit dem Quadrat des Abstandes ihrer Mittelpunkte von einander bedeutet. Diese Gleichung giebt einen Ausdruck für das Quadrat des Abstandes des Mittelpunktes des ganzen Massensystems m, m', m'', ... von dem Pole O, nämlich:

$$R^2 = \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma m} - \frac{\Sigma mm'\varrho^2}{(\Sigma m)^2}.\text{*)} \qquad (29)$$

Beispiele. 1) Es seien A, B, C die Mittelpunkte dreier gleicher Massen und G ihr gemeinsamer Mittelpunkt. Nach Formel (29) hat man:

$$AG^2 = \tfrac{1}{9}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$$
$$BG^2 = \tfrac{1}{9}(2BA^2 + 2BC^2 - AC^2)$$
$$CG^2 = \tfrac{1}{9}(2CA^2 + 2CB^2 - AB^2).$$

2) Es seien A, B, C, D die Mittelpunkte von vier gleichen Massen und G ihr gemeinsamer Mittelpunkt. Nach Formel (29) findet man:

$$AG^2 = \tfrac{1}{16}(3AB^2 + 3AC^2 + 3AD^2 - BC^2 - BD^2 - CD^2).$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man für BG^2, CG^2, DG^2.

30. In Formel (29) ist die Grösse $\frac{\Sigma mr^2}{\Sigma m}$ das arithmetische Mittel aus den Quadraten aller von dem Pole O nach

*) Diese Formel rührt von Lagrange her. S. die Abhandlung „Sur une nouvelle propriété du centre de gravité" in den Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1783, oder in den Oeuvres de Lagrange, T. V, p. 539.

den Massenpunkten $m, m', m'', \ldots$ gezogenen Radienvectoren. Man kann diesen Mittelwerth als das Quadrat einer gewissen Grösse K ansehen, die eine Art von Mittel aus den Werthen $r, r', r'', \ldots$ darstellt und durch die Formel

$$K = \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m}}$$

bestimmt ist. Aus Formel (29) folgt:

$$K^2 = R^2 + \frac{\Sigma m m' \varrho^2}{(\Sigma m)^2}. \tag{30}$$

Sind alle Massen $m, m', m'', \ldots$ positiv, so ist K immer reell; dabei geht aus Formel (30) hervor, dass K seinen Minimalwerth für $R = 0$ erhält, d. h. wenn der Pol O im Mittelpunkte des Massensystems liegt. Zugleich mit K hat auch die Summe $\Sigma m r^2 = K^2 \Sigma m$ ihren Minimalwerth. Man hat also den Satz: *Eine Summe von positiven Massen, jede multiplicirt mit dem Quadrat des Abstandes ihres Mittelpunktes von einem beliebigen Punkte, erreicht ihr Minimum, wenn dieser Punkt der Mittelpunkt des Massensystems ist.*

Bezeichnet man den Minimalwerth von K mit K_0, so hat man nach Formel (30):

$$K_0^2 = \frac{\Sigma m m' \varrho^2}{(\Sigma m)^2}, \text{ und } K^2 = R^2 + K_0^2. \tag{31}$$

Die Grösse K_0 ist nur von den Massen der Punkte m, $m', m'', \ldots$ und von ihren gegenseitigen Abständen abhängig. Die Formel (31) zeigt, dass K gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten R und K_0 sind.

Vertauscht man den Pol O mit einem anderen O_1 und bezeichnet die entsprechenden Werthe von R und K mit R_1 und K_1, so hat man nach Formel (31) $K_1^2 = R_1^2 + K_0^2$; folglich wird:

$$R_1^2 - R^2 = K_1^2 - K^2. \tag{32}$$

Man sieht aus dieser Formel, dass der Mittelpunkt C des Massensystems $(m, m', m'', \ldots)$ in der Ebene desjenigen Kreises liegt, nach welchem sich die Kugeln von den Radien K und K_1, deren Mittelpunkte O und O_1 sind, durchschneiden: hat man also K und K_1 nach der Formel $\sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m}}$ berechnet,

so kann man eine durch den Mittelpunkt C gehende Ebene construiren. Mit Hilfe von drei solchen Ebenen ist die Lage des Mittelpunktes bestimmt.

Der durch die Formel

$$K = \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m}}$$

bestimmte mittlere Radius unter den Radienvectoren $r, r', r'', \ldots$ kann gleich Null und imaginär werden, wenn es unter den Massen $m, m', m'', \ldots$ negative giebt.

C. Quadratische Momente in Bezug auf Ebenen. — Trägheitsmomente. — Hauptaxen.

31. Wenn eine continuirliche Masse m in unendlich kleine Elemente dm zerlegt ist, die keine endlichen Dimensionen haben, und wenn r den Abstand eines diesem Elemente angehörenden Punktes von einem gegebenen Pole O bezeichnet, so wollen wir das Product $r^2 dm$ das *elementare quadratische polare Moment*, und das über die ganze Masse ausgedehnte Integral $\int r^2 dm$ das *quadratische polare Moment der ganzen Masse* nennen. Bezeichnet man nun, wie im vorigen §, den Mittelwerth $\frac{\int r^2 dm}{m}$ mit K^2, so ist $K^2 m$ der Werth des quadratischen polaren Moments der ganzen Masse m.

Das quadratische polare Moment steht im Zusammenhange mit zwei anderen, sehr häufig in der Mechanik vorkommenden Grössen, die man das *quadratische Moment bezüglich einer Ebene* und das *quadratische Moment bezüglich einer Geraden* nennen kann.

Legt man nämlich durch den Pol O eine beliebige Gerade Ox und eine dazu senkrechte Ebene P, bezeichnet mit p den Abstand des Elements dm von der Axe Ox und mit q den Abstand desselben von der Ebene P, so hat man die Relation $r^2 = p^2 + q^2$, also auch: $r^2 dm = p^2 dm + q^2 dm$. Die Grösse $p^2 dm$ kann man das quadratische Moment des Elements dm bezüglich der Axe Ox nennen; doch wollen wir für dieselbe den allgemein gebräuchlichen Namen *„Trägheitsmoment“* beibehalten. Die Grösse $q^2 dm$ werden wir *quadra-*

tisches Moment des Elementes dm *bezüglich der Ebene* nennen. Die auf die ganze Masse m bezogenen Integrale $\int p^2 dm$ und $\int q^2 dm$ heissen dann das *Trägheitsmoment* der ganzen Masse m und deren *quadratisches Moment bezüglich der Ebene.*

Da

$$\int r^2 dm = \int p^2 dm + \int q^2 dm, \tag{1}$$

so ist *das quadratische polare Moment der ganzen Masse gleich der Summe des Trägheitsmoments und des quadratischen Moments bezüglich der Ebene.*

In der Mechanik hat das Trägheitsmoment die grösste Bedeutung, während die quadratischen Momente bezüglich eines Punktes und einer Ebene als Hilfsgrössen angesehen werden, die zur Bestimmung des Trägheitsmoments dienen.

Wir beschränken uns auf die Untersuchung von Massen, die lauter positive Elemente haben, da das Moment einer Masse, die auch negative Elemente enthält, als die Differenz zweier Momente angesehen werden kann, die wie positive Massen zu behandeln sind.

Der Begriff des quadratischen Moments bezüglich einer Ebene lässt sich, wie Binet dies thut,*) allgemeiner fassen, wenn man dem Perpendikel q auf die gegebene Ebene eine zu einer gegebenen Geraden (l) parallele, von dem Element dm nach der Ebene P gezogene Linie substituirt. Doch liegt kein wesentliches Bedürfniss für eine solche Verallgemeinerung vor, da man durch Division mit dem Quadrat des Cosinus des von der Geraden (l) mit den Normalen der Ebene P gebildeten Winkels von dem Falle der senkrechten Abstände q zu dem der geneigten übergehen kann. Gleichwohl werden wir später einen Fall treffen, wo man geneigte Abstände q zu betrachten hat.

Das Trägheitsmoment wird oft ersetzt durch die Grösse

$$k = \sqrt{\frac{\int p^2 dm}{m}},$$

die man den *Trägheitsradius* nennt. Es ist dies die Seite eines

*) „Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps (1811), in dem Journal de l'Éc. Polyt., 16me cahier (1813), p. 41.

Quadrats, dessen Inhalt das arithmetische Mittel aus den Flächen der Quadrate p^2 ist. Ebenso lässt sich das quadratische Moment $\int q^2 dm$ durch die Grösse

$$h = \sqrt{\frac{\int q^2 dm}{m}}$$

ersetzen, d. h. durch die Seite eines Quadrates, dessen Fläche das arithmetische Mittel aus den Flächen der Quadrate q^2 ist. Diese Grösse hat keinen besonderen Namen. Aus Gleichung (1) folgt $K^2 = k^2 + h^2$.

32. Bezeichnet man mit p_1 den Abstand des Elements dm von einer durch einen neuen Pol O_1 gehenden, zu Ox parallelen Axe O_1x und mit δ den Abstand der beiden Axen, so ist

$$p_1^2 = p^2 - 2p\delta \cos(p\delta) + \delta^2,$$

also:

$$\int p_1^2 dm = \int p^2 dm - 2\delta \int p \cos(p\delta) dm + \delta^2 m. \tag{2}$$

Hierin ist $\int p \cos(p\delta) dm$ die Summe der Momente ersten Grades bezüglich einer durch die Axe Ox gehenden und zu der Ebene der Axen Ox und O_1x senkrechten Ebene. Bedeutet also α den Abstand des Mittelpunktes der Masse m von dieser Ebene, so ist

$$\int p \cos(p\delta) dm = \alpha m,$$

folglich wird:

$$\int p_1^2 dm = \int p^2 dm - 2\alpha\delta m + \delta^2 m. \tag{3}$$

Diese Formel lässt sich benutzen, um von dem Trägheitsmomente bezüglich einer gegebenen Axe zu dem Trägheitsmomente bezüglich einer andern, der ersteren parallelen Axe überzugehen. Liegt der Mittelpunkt C der Masse m in der durch Ox gehenden und auf der Ebene der beiden Axen senkrechten Ebene, so ist $\alpha = 0$ und die Formel (3) geht über in:

$$\int p_1^2 dm = \int p^2 dm + \delta^2 m. \tag{4}$$

Man sieht aus dieser Formel, dass *das kleinste unter allen Trägheitsmomenten in Bezug auf die verschiedenen, zu derselben Richtung parallelen Axen dasjenige ist, welches der durch den Massenmittelpunkt gehenden Axe entspricht.*

Eine ähnliche Formel wie (3) lässt sich auch für das quadratische Moment bezüglich einer Ebene aufstellen. Es sei P_1 eine zu P parallele Ebene, q_1 der Abstand des Elements dm von ihr und δ der Abstand der Ebenen P und P_1 von einander, mit $+$ oder $-$ genommen, je nachdem die Ebene P_1 auf der Seite der positiven oder negativen q liegt. Es ist dann $q_1 = q - \delta$; folglich wird:

$$\int q_1^2 dm = \int q^2 dm - 2\delta \int q dm + \delta^2 m. \tag{5}$$

Hierin ist $\int q dm$ das Moment ersten Grades der Masse m bezüglich der Ebene P; bezeichnet man also den Abstand des Mittelpunktes dieser Masse von jener Ebene mit α, so ist $\int q dm = \alpha m$; daher wird:

$$\int q_1^2 dm = \int q^2 dm - 2\alpha\delta m + \delta^2 m. \tag{6}$$

Geht die Ebene P durch den Mittelpunkt der Masse m, so ist $\alpha = 0$ und die Formel (6) reducirt sich auf die folgende:

$$\int q_1^2 dm = \int q^2 dm + \delta^2 m. \tag{7}$$

Hieraus sieht man, dass *das kleinste unter allen quadratischen Momenten in Bezug auf unter einander parallele Ebenen dasjenige ist, welches der durch den Mittelpunkt der Masse gehenden Ebene entspricht.*

33. Betrachten wir nun die Methoden der Berechnung der Momente $\int r^2 dm$, $\int p^2 dm$, $\int q^2 dm$ unter der Voraussetzung, dass das Element dm durch geradlinige rechtwinklige Coordinaten x, y, z bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz bestimmt ist. Es sei r der Abstand dieses Elements vom Ursprung O, q der Abstand von einer durch O gehenden Ebene P und p der Abstand von einer senkrecht auf P durch O gelegten Axe Ol. Ferner seien α, β, γ die Cosinus der Richtungswinkel der Axe Ol gegen die Axen Ox, Oy, Oz, d. h. die Coordinaten des Schnittpunktes jener Axe mit einer Kugel vom Radius 1, deren Mittelpunkt O ist.

Da nun

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad q = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

so wird:

$$\int r^2 dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm + \int z^2 dm, \tag{8}$$

$$\int q^2 dm = \alpha^2 \int x^2 dm + \beta^2 \int y^2 dm + \gamma^2 \int z^2 dm$$
$$+ 2\beta\gamma \int yz dm + 2\gamma\alpha \int zx dm + 2\alpha\beta \int xy dm. \quad (9)$$

Nach Formel (1) ist aber

$$\int p^2 dm = \int r^2 dm - \int q^2 dm;$$

folglich wird:

$$\int p^2 dm = (1-\alpha^2)\int x^2 dm + (1-\beta^2)\int y^2 dm + (1-\gamma^2)\int z^2 dm$$
$$- 2\beta\gamma \int yz dm - 2\gamma\alpha \int zx dm - 2\alpha\beta \int xy dm. \quad (10)$$

Die Bedingung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ liefert

$$1 - \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \ 1 - \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \ 1 - \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

so dass man die Gleichung (10) auch schreiben kann:

$$\int p^2 dm = \alpha^2 \int (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int (z^2 + x^2) dm + \gamma^2 \int (x^2 + y^2) dm$$
$$- 2\beta\gamma \int yz dm - 2\gamma\alpha \int zx dm - 2\alpha\beta \int xy dm. \quad (11)$$

Die Formeln (8), (9) und (11) zeigen, dass zur Bestimmung der Momente $\int r^2 dm$, $\int q^2 dm$, $\int p^2 dm$ die folgenden 6 über die Masse m ausgedehnten Integrale zu berechnen sind:

$$\int x^2 dm, \quad \int y^2 dm, \quad \int z^2 dm, \quad (12)$$
$$\int yz dm, \quad \int zx dm, \quad \int xy dm. \quad (13)$$

Die Integrale (12) sind die quadratischen Momente bezüglich der Coordinatenebenen yOz, zOx, xOy. Aus ihnen lassen sich die Trägheitsmomente bezüglich der Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz, nämlich die Grössen

$$\int (y^2 + z^2) dm, \quad \int (z^2 + x^2) dm, \quad \int (x^2 + y^2) dm$$

zusammensetzen, die in Formel (11) als Coefficienten von α^2, β^2, γ^2 auftreten.

Das polare Moment $\int r^2 dm$ ist von den Cosinus α, β, γ unabhängig, während die Momente $\int q^2 dm$ und $\int p^2 dm$ homogene quadratische Functionen dieser drei Grössen sind, zwischen denen die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (14)$$

besteht.

Sind alle Elemente dm positiv, so sind die Momente $\int q^2 dm$ und $\int p^2 dm$ für jede Richtung der Axe Ol positiv. Daher müssen die Ausdrücke (9) und (11) für alle der Be-

dingung (14) genügenden Werthe von α, β, γ das Zeichen $+$ haben. Bezeichnet man zur Abkürzung den Ausdruck (9) mit $F(\alpha, \beta, \gamma)$ und substituirt in demselben für α, β, γ irgend drei reelle Grössen ξ, η, ζ, die man als Coordinaten eines gewissen Punktes M ansehen kann, so hat man

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \varrho^2 \int q^2 dm, \tag{15}$$

wo $\varrho = OM$ und $\int q^2 dm$ das quadratische Moment bezüglich einer durch O gehenden und auf OM senkrechten Ebene ist. Man sieht hieraus, dass die homogene quadratische Function

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 \int x^2 dm + \eta^2 \int y^2 dm + \zeta^2 \int z^2 dm \\ + 2\eta\zeta \int yz dm + 2\zeta\xi \int zx dm + 2\xi\eta \int xy dm \end{aligned}$$

für jedes reelle Werthsystem von ξ, η, ζ das Zeichen $+$ beibehält. Hierzu ist bekanntlich erforderlich, dass die Discriminante

$$\begin{vmatrix} \int x^2 dm, & \int xy dm, & \int xz dm \\ \int xy dm, & \int y^2 dm, & \int yz dm \\ \int xz dm, & \int yz dm, & \int z^2 dm \end{vmatrix}$$

und ihre Hauptunterdeterminanten

$$\begin{vmatrix} \int y^2 dm, & \int yz dm \\ \int yz dm, & \int z^2 dm \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \int z^2 dm, & \int xz dm \\ \int xz dm, & \int x^2 dm \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \int x^2 dm, & \int xy dm \\ \int xy dm, & \int y^2 dm \end{vmatrix},$$

sowie auch die Integrale $\int x^2 dm$, $\int y^2 dm$, $\int z^2 dm$ positiv sind.*)

34. Setzt man in Gleichung (15) $\varrho^2 \int q^2 dm = 1$, so ist die Lage des Punktes M so bestimmt, dass

$$OM = \varrho = \frac{1}{\sqrt{\int q^2 dm}},$$

d. h. dass sein Abstand vom Coordinatenursprung der Quadratwurzel aus dem quadratischen Moment bezüglich einer zur Richtung dieses Abstands senkrechten Ebene umgekehrt proportional ist.

---

*) Dies lässt sich auch direct beweisen. S. die Abhandlung von Binet in dem Bulletin des sciences, publié par la société philomathique, décembre 1811. Vergl. ferner Note de M. Bertrand am Ende des 2. Bandes der Mécanique analytique von Lagrange, 3me éd. (1853). Note V.

Die Coordinaten eines solchen Punktes erfüllen die Gleichung zweiten Grades

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 1,$$

die ein Ellipsoid darstellt, dessen Centrum im Coordinatenursprung liegt, weil die linke Seite das Zeichen $+$ für alle Werthe von ξ, η, ζ beibehält. Setzt man zur Abkürzung

$$\int x^2 dm = a, \quad \int y^2 dm = b, \quad \int z^2 dm = c,$$
$$\int yz dm = e, \quad \int zx dm = f, \quad \int xy dm = g,$$

so nimmt die Gleichung jenes Ellipsoides die Form an:

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2e\eta\zeta + 2f\zeta\xi + 2g\xi\eta = 1. \qquad (16)$$

Die Vertheilung seiner Radienvectoren OM um den Punkt O bestimmt das Gesetz der Vertheilung der quadratischen Momente $\int q^2 dm$ bezüglich der verschiedenen durch O gehenden Ebenen.

In Folge der Bedingung $\varrho = \frac{1}{\sqrt{\int q^2 dm}}$ entspricht die grosse Halbaxe des Ellipsoids dem kleinsten Werthe des Moments $\int q^2 dm$ und die kleine Halbaxe dem grössten Werthe des Moments.

Jedem zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe $Q = \int q^2 dm$ entspricht eine unendliche Menge von Axen, welche die Richtungen derjenigen Radienvectoren sind, die nach den Schnittpunkten des Ellipsoids (16) mit der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{Q} \qquad (17)$$

gehen. Entspricht Q einer der Axen des Ellipsoids, so berührt die Kugel (17) das Ellipsoid (16). Damit die Kugel das Ellipsoid berühre, sind aber folgende Bedingungen erforderlich:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi} : \xi = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \eta} : \eta = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \zeta} : \zeta.$$

Dieses Verhältniss lässt sich auch schreiben:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta}\eta + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\zeta\right) : (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = F(\xi, \eta, \zeta) : \varrho^2 = Q;$$

folglich hat man

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi} = Q\xi, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \eta} = Q\eta, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \zeta} = Q\zeta,$$

d. h.

$$\begin{aligned}(a-Q)\xi+g\eta+f\zeta&=0,\\ g\xi+(b-Q)\eta+e\zeta&=0,\\ f\xi+e\eta+(c-Q)\zeta&=0.\end{aligned}\tag{18}$$

Zum gleichzeitigen Bestehen dieser Gleichungen ist die Bedingung erforderlich:

$$\begin{vmatrix} a-Q, & g, & f \\ g, & b-Q, & e \\ f, & e, & c-Q \end{vmatrix}=0.\tag{19}$$

Diese Gleichung, die für Q vom dritten Grade ist, hat bekanntlich drei reelle Wurzeln, welche eben die den Axen des Ellipsoids (16) entsprechenden quadratischen Momente sind. Bezeichnet man also diese Wurzeln mit Q_1, Q_2, Q_3, so sind

$$\frac{1}{\sqrt{Q_1}},\ \frac{1}{\sqrt{Q_2}},\ \frac{1}{\sqrt{Q_3}}$$

die Halbaxen des Ellipsoids. Substituirt man in Gleichung (18) die Wurzel Q_r für Q, so erhält man die Gleichungen derjenigen Geraden, auf der die Halbaxe $\frac{1}{\sqrt{Q_r}}$ liegt.

W. Thomson*) nennt das das Vertheilungs-Gesetz der quadratischen Momente bestimmende Ellipsoid (16) *ellipsoid of construction.* Wir wollen es *Grundellipsoid* nennen.

Wählt man als Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz die Richtungen der Axen des Grundellipsoids, so wird in Gleichung (16) $e=0$, $f=0$, $g=0$, d. h.

$$\int yz\,dm=0,\quad \int zx\,dm=0,\quad \int xy\,dm=0.\tag{20}$$

Man schliesst hieraus, dass *es für jede Masse m in jedem Punkte des Raumes drei zu einander senkrechte Axen giebt, die, wenn man sie als Axen eines geradlinigen rechtwinkligen Coordinatensystems wählt, die Bedingung erfüllen, dass jedes Integral des Products des Massenelements in zwei ungleichnamige Coordinaten gleich Null ist.* Diese Axen hat Euler *Hauptaxen* genannt; man nennt sie auch *Trägheitsaxen.* Die quadratischen Momente a, b, c (12) bezüglich derjenigen Ebenen, die je zwei Haupt-

*) In seiner Abhandlung „On the principal axes of a solid body“ in dem Cambridge and Dublin Math. Journ., ed. by W. Thomson. Vol. I (1846), p. 202, Anm.

axen enthalten, heissen *Hauptmomente.* Aus ihnen lassen sich die Trägheitsmomente bezüglich der Hauptaxen bilden, nämlich

$$\begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2)dm = b + c, \\ B &= \int (z^2 + x^2)dm = c + a, \\ C &= \int (x^2 + y^2)dm = a + b; \end{aligned} \tag{21}$$

man nennt sie *Hauptträgheitsmomente.*

Die Hauptaxen und Hauptmomente für den Mittelpunkt der Masse m werden wir *Hauptcentralaxen* und *Hauptcentralmomente* nennen.

Damit die Coordinatenaxe Oz in die Richtung einer der Axen des Grundellipsoids falle, ist genügend, dass in Gleichung (16) nur $e = 0$ und $f = 0$ sei, d. h. dass

$$\int yzdm = 0 \quad \text{und} \quad \int zxdm = 0.$$

Also genügen zwei der Bedingungen (20), damit eine der Coordinatenaxen eine Hauptaxe der Masse sei.

Für einen gegebenen Punkt O existirt nur ein einziges bestimmtes Hauptaxensystem, wenn das Grundellipsoid drei ungleiche Halbaxen hat, d. h. wenn die Gleichung (19) keine gleichen Wurzeln hat. In speciellen Fällen kann aber das Grundellipsoid eine Rotationsfläche und eine Kugel werden: dann giebt es im Punkte O unendlich viele Hauptaxen. Im ersteren Falle sind die Rotationsaxe und jede auf ihr senkrechte durch den Punkt O gehende Axe Hauptaxen; zugleich sind alle quadratischen Momente bezüglich der durch die Rotationsaxe gehenden Ebenen einander gleich. Im zweiten Falle ist jede durch das Centrum der Kugel gehende Gerade eine Hauptaxe, und die quadratischen Momente bezüglich aller durch jenen Punkt gehenden Ebenen sind einander gleich.

Sind die rechtwinkligen Coordinatenaxen ein System von Hauptaxen, so nimmt die Formel (9) und die Gleichung des Grundellipsoids die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \int q^2 dm &= a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2, \\ a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 &= 1. \end{aligned} \tag{22}$$

35. Bezeichnet man den Ausdruck (11) mit $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ und substituirt für α, β, γ die Coordinaten ξ, η, ζ eines beliebigen Punktes M, so hat man:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \varrho^2 \int p^2 dm.$$

Dies zeigt, dass, wenn alle Elemente dm positiv sind, die Function $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ das Zeichen $+$ für jedes System der Grössen ξ, η, ζ beibehält. Ist nun die Lage des Punktes M speciell durch die Gleichung

$$\varrho^2 \int p^2 dm = 1$$

bedingt, d. h. ist $OM = \frac{1}{\sqrt{\int p^2 dm}}$ eine Grösse, die der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmoment bezüglich der Axe OM umgekehrt proportional ist, so müssen die Coordinaten ξ, η, ζ der Gleichung zweiten Grades $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 1$, d. h.

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2e\eta\zeta - 2f\zeta\xi - 2g\xi\eta = 1 \quad (23)$$

genügen, welches die Gleichung eines Ellipsoids ist, dessen Centrum in O liegt. Die Gruppirung der Radienvectoren dieses Ellipsoids um den Punkt herum bestimmt das Vertheilungsgesetz der Trägheitsmomente bezüglich der durch den Punkt O gehenden Axen. Poinsot nennt das Ellipsoid (23) das *Centralellipsoid;* auch nennt man es *Trägheitsellipsoid.* Wir wählen diese letztere Benennung und werden dasjenige Ellipsoid, dessen Centrum der Mittelpunkt der Masse m ist, das *centrale Trägheitsellipsoid* nennen.

Wählt man die Richtungen der Axen des Trägheitsellipsoids als Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz, so fallen in Gleichung (23) die Glieder mit $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ weg, d. h. es ist dann: $e = 0$, $f = 0$, $g = 0$. Hieraus folgt, dass *die Axen des Trägheitsellipsoids ebenso wie die Axen des Grundellipsoids die Hauptaxen der Masse m für den Punkt O sind.* Für diese Axen geht die Gleichung (23) und die Formel (11) über in:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1, \quad (24)$$

$$\int p^2 dm = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2. \quad (25)$$

Die grösste Halbaxe des Trägheitsellipsoids entspricht dem kleinsten Trägheitsmoment, die kleinste Axe dem grössten Trägheitsmoment.

Das Trägheitsellipsoid geht zugleich mit dem Grundellipsoid in eine Rotationsfläche oder in eine Kugel über; denn wenn

zwei der drei Grössen a, b, c einander gleich sind, so giebt es auch unter den drei Grössen

$$A = b + c, \quad B = c + a, \quad C = a + b$$

zwei gleiche, und wenn $a = b = c$, so folgt auch $A = B = C$. Im letzteren Falle sind die Trägheitsmomente bezüglich aller durch den Punkt O gehenden Geraden einander gleich.

36. Sind die Hauptcentralaxen und die quadratischen Hauptcentralmomente a, b, c bekannt, so kann man mit Hilfe der Formeln (4), (7), (22) und (25) die Grösse des quadratischen Moments bezüglich jeder gegebenen Ebene und die Grösse des Trägheitsmoments bezüglich jeder gegebenen Geraden finden; auch lassen sich dann die Hauptaxen für jeden gegebenen Punkt bestimmen.

Gesetzt, der Ursprung O der Coordinaten x, y, z sei der Mittelpunkt der Masse m, die Coordinatenaxen seien die Hauptcentralaxen der Masse m, $O'(x, y, z)$ sei ein beliebig gewählter Punkt, $O'l$ eine beliebige, durch O' gelegte Gerade, α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche diese Gerade mit den Coordinatenaxen bildet, P die zu $O'l$ senkrechte, durch O' gehende Ebene, δ der Abstand des Punktes O von der Ebene P und $\int q_1^2 dm$ das quadratische Moment bezüglich dieser Ebene.

Nach Formel (7) ist:

$$\int q_1^2 dm = \int q^2 dm + \delta^2 m;$$

Formel (22) giebt $\int q^2 dm = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$, während aus der Gleichung der Ebene P folgt $\delta = \alpha x + \beta y + \gamma z$; folglich wird:

$$\int q_1^2 dm = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 m. \tag{26}$$

Bezeichnet ferner $\int p_1^2 dm$ das Trägheitsmoment bezüglich der Axe $O'l$, so findet man aus den Formeln (4) und (25):

$$\int p_1^2 dm = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + [(x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2] m. \tag{27}$$

Die Gleichung (26) liefert die Gleichung des Grundellipsoids für den Punkt O', nämlich:

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + m(x\xi + y\eta + z\zeta)^2 = 1, \tag{28}$$

worin ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Fläche in Bezug auf Axen sind, deren Ursprung in O' und die den Hauptcentralaxen Ox, Oy, Oz parallel sind.

Nach § 34 kann man nun die Gleichungen einer der Hauptaxen für den Punkt O' finden. Bedeutet Q die Grösse des quadratischen Moments $\int q_1^2 dm$ und setzt man zur Abkürzung

$$s = x\xi + y\eta + z\zeta,$$

so findet man für eine der Hauptaxen des Punktes O' die Gleichungen:

$$\begin{aligned}(a - Q)\xi + msx &= 0,\\ (b - Q)\eta + msy &= 0,\\ (c - Q)\zeta + msz &= 0.\end{aligned} \tag{29}$$

Eliminirt man aus denselben ξ, η, ζ, so erhält man die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen dieser Gleichungen in der Form:

$$\begin{gathered}(Q-a)(Q-b)(Q-c) -\\ -mx^2(Q-b)(Q-c)-my^2(Q-c)(Q-a)-mz^2(Q-a)(Q-b)=0.\end{gathered} \tag{30}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht auf die Gleichung (3) S. 122 der Kinematik reduciren, deren Wurzeln die elliptischen Coordinaten des Punktes $O'(x, y, z)$ sind. Um dies zu zeigen, wählen wir eine Grösse K, die grösser als die Momente a, b, c, sonst aber beliebig sein soll, und setzen

$$\frac{K-a}{m} = a_1, \quad \frac{K-b}{m} = a_2, \quad \frac{K-c}{m} = a_3, \tag{31}$$

$$\frac{Q-K}{m} = \lambda. \tag{32}$$

Führen wir nun in die Gleichungen (30) und (29) statt a, b, c, Q ihre aus (31) und (32) bestimmten Werthe ein, so nimmt (30) die Gestalt an

$$\begin{gathered}(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)(\lambda+a_3) -\\ -x^2(\lambda+a_2)(\lambda+a_3)-y^2(\lambda+a_3)(\lambda+a_1)-z^2(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)=0,\end{gathered} \tag{33}$$

während die Gleichungen (29) übergehen in:

$$\begin{aligned}(a_1 + \lambda)\xi - sx &= 0,\\ (a_2 + \lambda)\eta - sy &= 0,\\ (a_3 + \lambda)\zeta - sz &= 0.\end{aligned} \tag{34}$$

Ist $a < b < c$, so hat man $a_1 > a_2 > a_3$, und die Wurzeln der Gleichung (33), die wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezeichnen, liegen zwischen den auf S. 123 der Kinematik gegebenen Grenzen, nämlich:

$$+\infty > \lambda_1 > -a_3 > \lambda_2 > -a_2 > \lambda_3 > -a_1. \tag{35}$$

Die Grössen λ_1, λ_2, λ_3 sind die elliptischen Coordinaten des Punktes O'; die erste derselben bestimmt ein Ellipsoid (λ_1), die zweite ein einmanteliges Hyperboloid (λ_2) und die dritte ein zweimanteliges Hyperboloid (λ_3); alle drei Flächen sind confocal mit dem auf den Hauptcentralaxen Ox, Oy, Oz construirten Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1, \tag{36}$$

für dessen Hauptschnitte die Quadrate der Excentricitäten sind:

$$a_1 - a_2 = \frac{b-a}{m}, \quad a_1 - a_3 = \frac{c-a}{m}, \quad a_2 - a_3 = \frac{c-b}{m}.$$

Setzt man $K = a + b + c$, so erhält man aus den Formeln (31):

$$a_1 = \frac{A}{m}, \quad a_2 = \frac{B}{m}, \quad a_3 = \frac{C}{m};$$

folglich sind $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ die Trägheitsradien bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz.

Wir schliessen hieraus, *dass die elliptischen Coordinatenflächen* (λ_1), (λ_2), (λ_3) *confocal sind mit demjenigen Ellipsoid, das zu Halbaxen die auf den Hauptcentralaxen aufgetragenen Trägheitsradien bezüglich dieser Axen hat.*

Die Gleichungen (34), welche eine der Hauptaxen des Punktes O' darstellen, lassen sich auch in der folgenden Form schreiben:

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{x}{a_1 + \lambda_i} : \frac{y}{a_2 + \lambda_i} : \frac{z}{a_3 + \lambda_i};$$

hierbei sind die rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Grössen proportional den Cosinus der Winkel, die der Differentialparameter h_i der Coordinate λ_i mit den Axen Ox, Oy, Oz bildet; es ist also:

$$\xi : \eta : \zeta = \cos(h_i x) : \cos(h_i y) : \cos(h_i z).$$

Dies zeigt, dass *die Hauptaxen für den Punkt O' die Richtungen der Differentialparameter der elliptischen Coordinaten jenes Punktes haben, d. h. die Richtungen der Normalen der drei orthogonalen Flächen* (λ_1), (λ_2), (λ_3).

Mit Hilfe der elliptischen Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3 lassen sich die quadratischen Momente für den Punkt O' leicht bestimmen. Bezeichnet man mit a', b', c' die Momente, welche

den zu h_1, h_2, h_3 senkrechten Ebenen entsprechen, so hat man, da nach Formel (31) und (32)

$$Q - a = (a_1 + \lambda)m,\ Q - b = (a_2 + \lambda)m,\ Q - c = (a_3 + \lambda)m$$

ist, wenn man $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $Q = a', b', c'$ setzt:

$$\begin{aligned} a' - a &= (a_1 + \lambda_1)m, & a' - b &= (a_2 + \lambda_1)m, & a' - c &= (a_3 + \lambda_1)m, \\ b' - a &= (a_1 + \lambda_2)m, & b' - b &= (a_2 + \lambda_2)m, & b' - c &= (a_3 + \lambda_2)m, \\ c' - a &= (a_1 + \lambda_3)m, & c' - b &= (a_2 + \lambda_3)m, & c' - c &= (a_3 + \lambda_3)m. \end{aligned} \quad (37)$$

Man sieht hieraus, dass *die Differenzen zwischen den quadratischen Hauptmomenten des Punktes O' und dem centralen quadratischen Momente gleich sind der Masse, multiplicirt mit den Quadraten derjenigen Halbaxen der confocalen Flächen* (λ_1), (λ_2), (λ_3), *welche die Richtung der centralen Hauptaxe haben, die diesem centralen Momente entspricht.*

Ist r der Abstand OO', so hat man nach Formel (14) S. 131 der Kinematik:

$$r^2 = a_1 + a_2 + a_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

d. h.

$$r^2 = \frac{1}{m}(a' + b' + c' - a - b - c). \quad (38)$$

Bezeichnet man mit A', B', C' die Hauptträgheitsmomente für den Punkt O' bezüglich der Axen h_1, h_2, h_3, so erhält man mit Zuziehung der Formeln (37) und (38):

$$A' = (r^2 - \lambda_1)m, \quad B' = (r^2 - \lambda_2)m, \quad C' = (r^2 - \lambda_3)m. \quad (39)$$

Die hier vorgetragene Methode der Ableitung der Hauptaxen und Hauptmomente in einem gegebenen Punkte aus den Hauptcentralaxen und Hauptmomenten rührt von Binet her.*)

37. Betrachten wir nun die speciellen Fälle, in denen es unter den Hauptcentralmomenten a, b, c gleiche giebt. Gesetzt es sei $b = c$ und $a < b$; dann ist $a_2 = a_3$ und $\lambda_2 = - a_2$; daher sind bei dem einmanteligen Hyperboloid (λ_2) die beiden in der Coordinatenebene yOz liegenden Halbaxen gleich Null,

*) S. die S. 73, Anm., citirte Abhandlung. Die Bemerkung, dass die Halbaxen $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ die Trägheitsradien bezüglich der Hauptcentralaxen sind, wenn man für K den Werth $K = a + b + c$ wählt, ist von Townsend gemacht worden; s. dessen Abhandlung „On principal axes of a body, their moments of inertia and distribution in space" in dem Cambridge and Dublin Math. Journ., Vol. I (1846).

so dass dasselbe in zwei durch die Axe Ox gehende Ebenen degenerirt. Zu gleicher Zeit gehen das Ellipsoid (λ_1) und das zweimantelige Hyperboloid (λ_3) in Rotationsflächen mit Ox als Rotationsaxe über. Ist dagegen $a = b$ und $c > a$, so wird $a_1 = a_2$; in diesem Falle ist $\lambda_3 = -a_1$ und die beiden in der Ebene xOy liegenden Axen des zweimanteligen Hyperboloids (λ_3) sind gleich Null. Dadurch degenerirt dasselbe in zwei durch die Axe Oz gehende Ebenen, während das Ellipsoid (λ_1) und das Hyperboloid (λ_2) Rotationsflächen um jene Axe werden. Endlich im Falle $a = b = c$ hat man $a_1 = a_2 = a_3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -a_1$. Das Ellipsoid (λ_1) geht in eine Kugel vom Radius r über. Wenn man auf diesen Fall von dem Falle $a_2 = a_3$ kommt, indem man noch $a_1 = a_2$ setzt, so verwandelt sich dabei das Hyperboloid (λ_2) in zwei durch die Axe Ox gehende Ebenen und das Hyperboloid (λ_3) in einen Rotationskegel um dieselbe Axe. Geht man aber von dem Falle $a_1 = a_2$ darauf über, indem man weiter $a_3 = a_2$ setzt, so wird (λ_2) zu einem Rotationskegel um Oz und (λ_3) degenerirt in zwei durch eben diese Axe gehende Ebenen. Im letzten Falle, bei $a_1 = a_2 = a_3$, ist eine der Hauptaxen im Punkte O' die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Massenmittelpunkte O, die beiden andern aber sind beliebig in der darauf senkrechten Ebene wählbar; denn $b' = c' = a$ (s. Formel 37). Ueberdies ist $a' = r^2 m + a$, woraus hervorgeht, dass das Moment a' dem Centralmomente a nur in dem Falle $r = 0$ gleich sein kann.

Sind also alle drei quadratischen Hauptcentralmomente einander gleich, so sind in jedem nicht im Massenmittelpunkte gelegenen Punkte zwei quadratische Hauptmomente gleich dem Centralmomente, das dritte aber ist grösser. Die Hauptträgheitsmomente im Punkte O' haben im vorliegenden Falle die Werthe:

$$A' = 2a, \quad B' = 2a + r^2 m, \quad C' = 2a + r^2 m.$$

Zwei von diesen Momenten sind also einander gleich, das dritte ist kleiner. Es ist aus diesen Ausdrücken der Hauptmomente ersichtlich, dass es ausser dem Massenmittelpunkte keinen weiteren Punkt giebt, für den alle drei Hauptmomente gleich wären.

38. Setzen wir nun voraus, dass die Centralmomente a, b, c nicht alle einer und derselben Grösse gleich sind, und

untersuchen wir, ob es nicht einen Punkt O' giebt, für den zwei der Momente a', b', c' einander gleich wären.

Um der Bedingung $b' = c'$ zu genügen, ist erforderlich, dass $\lambda_2 = \lambda_3$ wird (wie aus den Gleichungen (37) ersichtlich); folglich muss die Gleichung (33) in diesem Falle zwei gleiche Wurzeln haben. Die Grenzen der Wurzeln dieser Gleichung zeigen, dass man $\lambda_2 = \lambda_3 = -a_2$ zu setzen hat. Substituirt man $-a_2$ für λ in Gleichung (33), so findet sich $y = 0$; setzt man nun in derselben Gleichung $y = 0$ und dividirt durch $\lambda + a_2$, so muss man eine Gleichung erhalten, die noch eine Wurzel $-a_2$ hat; daher ist

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_2) - x^2(a_3 - a_2) - z^2(a_1 - a_2) = 0,$$

oder

$$\frac{x^2}{a_1 - a_2} - \frac{z^2}{a_2 - a_3} = 1; \tag{40}$$

mithin liegt der Punkt O' in der Ebene zOx auf einer Hyperbel, deren Halbaxen die Excentricitäten der Schnittcurve jener Ebene mit dem Ellipsoid (36) sind. Man nennt eine solche Hyperbel *Focalhyperbel.*

Um der Bedingung $a' = b'$ zu genügen, hat man $\lambda_1 = \lambda_2 = -a_3$ zu setzen; dadurch wird $z = 0$ und

$$\frac{x^2}{a_1 - a_3} + \frac{y^2}{a_2 - a_3} = 1; \tag{41}$$

also liegt O' in der Ebene xOy auf einer Ellipse, deren Halbaxen die Excentricitäten der Schnittcurve des Ellipsoids (36) mit der Ebene xOy sind. Man nennt diese Curve *Focalellipse.*

Die Axe Ox schneidet die Hyperbel (40) im Punkte $z = 0$, $x = \pm\sqrt{a_1 - a_2}$, und die Ellipse (41) im Punkte $y = 0$, $x = \pm\sqrt{a_1 - a_3}$. Da a_3 nicht gleich a_2 ist, so haben die beiden Curven keine gemeinschaftlichen Punkte, d. h. *wenn die drei Hauptcentralmomente a, b, c verschieden sind, so giebt es keine Punkte mit drei gleichen Hauptmomenten.*

39. Gesetzt, es sei $b = c$, d. h. $a_2 = a_3$; untersuchen wir nun, wie in diesem Falle der Bedingung $b' = c'$ genügt werden kann. Es erfordert dies, dass $\lambda_2 = \lambda_3 = -a_2 = -a_3$ sei; dazu ist aber nothwendig (s. Gleichung (33)), dass $y = 0$,

$z = 0$ und $x^2 = \lambda_1 + a_1$ wird; mithin liegen in diesem Falle alle Punkte, die zwei gleiche Momente b' und c' haben, auf der Axe Ox, und jeder Punkt dieser Axe hat jene Eigenschaft. Unter denselben giebt es zwei Punkte, für die alle drei Momente a', b', c' einander gleich sind.

Um nämlich der Bedingung $a' = b' = c'$ zu genügen, hat man zu setzen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -a_2$, d. h. also: $x^2 = a_1 - a_2$; hieraus folgt:

$$x = \pm \sqrt{a_1 - a_2} = \pm \sqrt{\frac{b-a}{m}} = \pm \sqrt{\frac{A-B}{m}}. \quad (42)$$

Da aber $b > a$, $A > B$ ist, so ist dieser Werth von x reell; er bestimmt den Abstand derjenigen beiden Punkte vom Massenmittelpunkte, welche die Eigenschaft haben, dass für sie die drei Hauptmomente einander gleich sind.

Geht man davon aus, $b = c$ zu setzen und sucht die Punkte, für welche $a' = b'$ wird, so hat man $\lambda_1 = \lambda_2 = -a_2$ zu setzen; dies liefert aber $y = 0$, $z = 0$, $a_1 + \lambda_3 = x^2$, was auf den vorigen Schluss zurückführt.

Setzen wir endlich $a = b$, d. h. $a_1 = a_2$ und suchen wir einen Punkt zu bestimmen, für den $b' = c'$ ist. Um dieser Bedingung zu genügen, hat man $\lambda_2 = \lambda_3 = -a_1$ zu setzen; hiermit giebt die Gleichung (33) $x = 0$, $y = 0$, $a_3 + \lambda_1 = z^2$; folglich liegen die Punkte, für welche die zwei Hauptmomente b' und c' gleich sind, auf der Axe Oz, und jeder Punkt dieser Axe hat jene Eigenschaft. Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man $a' = b'$ setzt. Wenn im Falle $a = b$ alle drei Momente a', b', c' einander gleich sein sollen, so muss man $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -a_1$ setzen; dann wird $z^2 = a_3 - a_1$ und $z = \sqrt{a_3 - a_1}$. Da nun $a_1 > a_3$ ist, so ist dieser Ausdruck imaginär. In diesem Falle giebt es also keine Punkte mit drei gleichen Hauptmomenten.

Punkte mit drei gleichen Hauptmomenten existiren also nur in dem Falle, wenn zwei quadratische Hauptcentralmomente gleich und das dritte kleiner als die andern ist, oder wenn zwei Hauptträgheitsmomente gleich, und das dritte grösser ist als jene. Solcher Punkte giebt es zwei: sie liegen auf der dem grösseren centralen Trägheitsmomente entsprechenden Axe, in gleichen Abständen vom Massenmittelpunkt, und dieser Abstand ist gleich der Quadrat-

wurzel aus der Differenz der Quadrate des grösseren und des kleineren Trägheitsradius (s. Formel (42)).

40. Behandeln wir nun die Aufgabe: einen Punkt x, y, z zu finden, für den die drei quadratischen Hauptmomente gegebene Werthe a', b', c' haben; dabei seien die quadratischen Hauptcentralmomente a, b, c als bekannt vorausgesetzt.

Nach den in der Kinematik S. 130 entwickelten Formeln zur Darstellung der geradlinigen Coordinaten als Functionen der elliptischen findet man mit Beachtung der Gleichungen (37) die geradlinigen Coordinaten des gesuchten Punktes bezüglich der Hauptcentralaxen in der Form:

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a'-a)(b'-a)(c'-a)}{(b-a)(c-a)m}},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(a'-b)(b'-b)(c'-b)}{(c-b)(a-b)m}},$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{(a'-c)(b'-c)(c'-c)}{(a-c)(b-c)m}}.$$

Mit Berücksichtigung der Vorzeichen erhält man hiernach 8 Punkte, die bezüglich der Coordinatenebenen symmetrisch gelegen sind. Mit Hilfe der Formeln (34) ergeben sich dann die Gleichungen der Hauptaxen im Punkte (x, y, z).

41. Aus den Formeln (37) sieht man, dass alle Punkte, für die eines der quadratischen Hauptmomente a', b', c' einen gegebenen Werth hat, auf der Fläche zweiter Ordnung (λ_i) liegen:

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_i} + \frac{y^2}{a_2+\lambda_i} + \frac{z^2}{a_3+\lambda_i} = 1;$$

somit liegen die Punkte, für welche die beiden Momente a' und b' gegebene Werthe besitzen, auf der Schnittcurve der Flächen (λ_1) und (λ_2).

Alle Punkte, für die eins der Hauptträgheitsmomente A', B', C' einen gegebenen Werth hat, liegen auf einer Fläche 4[ter] Ordnung, die man die Fresnel'sche *Wellenfläche* nennt. Bezeichnet man nämlich mit h einen der Trägheitsradien $\sqrt{\frac{A'}{m}}$, $\sqrt{\frac{B'}{m}}$, $\sqrt{\frac{C'}{m}}$ und mit λ den entsprechenden Werth $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so hat man nach den Formeln (39) $\lambda = r^2 - h^2 = x^2 + y^2 + z^2 - h^2$;

wenn man diesen Werth von λ in die Gleichung (33) substituirt, so erhält man die Gleichung der gesuchten Fläche:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2)\,&[x^2(h^2 - a_1) + y^2(h^2 - a_2) + z^2(h^2 - a_3)]\\ &- x^2(h^2 - a_1)(2h^2 - a_2 - a_3)\\ &- y^2(h^2 - a_2)(2h^2 - a_3 - a_1)\\ &- z^2(h^2 - a_3)(2h^2 - a_1 - a_2)\\ + (h^2 - a_1)&(h_2 - a_2)(h^2 - a_3) = 0;\end{aligned}$$

hierin ist h^2 als constant zu betrachten. Die Gleichung lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2+a_1-h^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2+a_2-h^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2+a_3-h^2} = 1.$$

42. Es giebt Fälle, in denen man die Richtungen der Hauptaxen finden kann, ohne die Gleichung des Grundellipsoids aufzustellen; man hat dann die folgenden Bemerkungen zu beachten.

Gesetzt, die Elemente dm der gegebenen Masse m seien alle symmetrisch bezüglich einer Ebene P gelegen, d. h. alle Elemente haben paarweise gleiche Massen und jedes Paar solcher Massen liege auf einem Perpendikel zur Ebene P, in gleichem Abstande von dieser letzteren. In diesem Falle ist das in einem beliebigen Punkte O der Ebene P auf dieser errichtete Perpendikel eine der Hauptaxen des Punktes O. Um dies zu beweisen, wählen wir O als Ursprung der geradlinigen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und die Axe Oz senkrecht zur Ebene P. Dann entspricht einem Elemente dm, dessen Coordinaten x, y, z sind, ein anderes Element von gleicher Masse, dessen Coordinaten x, y, $-z$ sind. Daher sind in jedem der Integrale $\int yz\,dm$ und $\int zx\,dm$ die Elemente paarweise gleich und von entgegengesetztem Zeichen; folglich ist:

$$\int yz\,dm = 0 \quad \text{und} \quad \int zx\,dm = 0;$$

dies ist aber die Bedingung dafür, dass die Axe Oz eine Hauptaxe für den Punkt O ist (s. § 34).

Ist P' eine zu P senkrechte Ebene, welche die Masse m gleichfalls symmetrisch theilt, so sind die in einem beliebigen Punkte O ihres Durchschnitts auf den Ebenen errichteten Perpendikel zwei Hauptaxen für den Punkt O und die Schnittlinie selbst ist die dritte Hauptaxe. Hieraus folgt zugleich,

dass drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen sich in Geraden schneiden, die die Hauptaxen für ihren Schnittpunkt sind; überdies sind sie die Hauptcentralaxen, denn ihr Schnittpunkt ist der Massenmittelpunkt.

Wir wollen nun diese Methode, die Hauptaxen zu finden, durch Beispiele erläutern und zugleich einige Beispiele für die Berechnung der Hauptmomente geben.

1) *Hauptaxen und Hauptmomente eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedons.*

Die drei Ebenen, die durch die Mitten dreier zusammenstossender Kanten gehen und auf den Kanten senkrecht stehen, sind Symmetrieebenen für die Massenelemente des Parallelepipedons. Daher ist ihr Schnittpunkt O der Massenmittelpunkt, und ihre Schnittlinien sind die Hauptcentralaxen.

Wählen wir diese Geraden zu Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz und bezeichnen wir die Länge der Kanten des Parallelepipedons mit p, q, r und die Dichtigkeit seiner Masse mit ϱ; dann findet man für die quadratischen Hauptcentralmomente die Ausdrücke:

$$a = \int x^2 dm = \varrho \int x^2 dx dy dz = \tfrac{1}{12} p^3 q r \varrho = \tfrac{1}{12} m p^2,$$
$$b = \tfrac{1}{12} m q^2, \quad c = \tfrac{1}{12} m r^2;$$

hieraus erhält man die Hauptcentralträgheitsmomente:

$$A = \frac{m}{12}(q^2 + r^2), \quad B = \frac{m}{12}(r^2 + p^2), \quad C = \frac{m}{12}(p^2 + q^2).$$

Das Trägheitsmoment M bezüglich einer Axe, die durch den Massenmittelpunkt geht und mit den Kanten die Winkel λ, μ, ν einschliesst, ist durch die Formel ausgedrückt:

$$M = \frac{m}{12}[(q^2 + r^2)\cos^2\lambda + (r^2 + p^2)\cos^2\mu + (p^2 + q^2)\cos^2\nu]$$
$$= \frac{m}{12}(p^2 \sin^2\lambda + q^2 \sin^2\mu + r^2 \sin^2\nu).$$

Das Moment in Bezug auf eine der vorigen parallele Axe im Abstand δ von jener ist $M + \delta^2 m$.

Für die Trägheitsmomente in Bezug auf die Kanten des Parallelepipedons hat man:

$$\frac{m}{3}(q^2 + r^2), \quad \frac{m}{3}(r^2 + p^2), \quad \frac{m}{3}(p^2 + q^2).$$

Für parallele Kanten sind die Momente gleich, weil solche Kanten gleichen Abstand von dem Massenmittelpunkt haben.

2) *Hauptaxen und Hauptmomente eines homogenen Ellipsoids.*

Es sei

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

die auf die Axen bezogene Gleichung des Ellipsoids.

Da die Hauptdiametralebenen dieser Fläche Symmetrieebenen der Masse m des Ellipsoids sind, so sind ihre Schnittlinien, d. h. die Axen der Fläche, die Hauptcentralaxen der Masse des Ellipsoids.

Ist ϱ die Dichtigkeit des Ellipsoids, so wird:

$$a = \varrho \int x^2 dx dy dz = \frac{4}{15} \pi \varrho p^3 q r = \frac{m}{5} p^2,$$

$$b = \frac{m}{5} q^2, \quad c = \frac{m}{5} r^2.$$

Hierauf erhält man die Hauptcentralträgheitsmomente:

$$A = \frac{m}{5}(q^2 + r^2), \quad B = \frac{m}{5}(r^2 + p^2), \quad C = \frac{m}{5}(p^2 + q^2),$$

sowie die allgemeine Formel

$$M = \frac{m}{5}(p^2 \sin^2 \lambda + q^2 \sin^2 \mu + r^2 \sin^2 \nu)$$

für das Trägheitsmoment bezüglich einer Axe, die durch das Centrum des Ellipsoids geht und mit den Axen desselben die Winkel λ, μ, ν bildet.

Ist das Ellipsoid eine Rotationsfläche um die Axe Ox, so ist $q = r$, also wird:

$$A = \frac{2m}{5} r^2, \quad B = C = \frac{m}{5}(p^2 + r^2).$$

Ist $r > p$, d. h. ist das Ellipsoid nach der Rotationsaxe abgeplattet, so ist $A > B$. In diesem Falle giebt es (s. § 39) auf der Axe Ox zwei Punkte mit drei gleichen Hauptmomenten. Diese Punkte liegen im Abstand

$$\pm \sqrt{\tfrac{1}{5}(r^2 - p^2)}$$

vom Centrum des Ellipsoids.

Ist das Ellipsoid eine Kugel, so wird $p = q = r$; folglich hat man in diesem Falle: $M = A = B = C = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{8}{15} \pi \varrho r^5$.

Da das Moment der Differenz zweier Massen bezüglich einer gegebenen Axe gleich ist der Differenz der Momente der einzelnen Massen bezüglich dieser Axe, so ist das Moment einer homogenen Kugelschicht, die von zwei concentrischen Kugeln von den Radien r und r' eingeschlossen wird, gleich

$$\tfrac{8}{15} \pi \varrho (r'^5 - r^5).$$

Für eine Schicht von unendlich kleiner Dicke dr hat man $r' = r + dr$ zu setzen. Man erhält dann mit Vernachlässigung von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$\tfrac{8}{3} \pi \varrho r^4 dr. \qquad (a)$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man das Differential des Trägheitsmoments einer nicht homogenen Kugelmasse vom Radius R erhalten, wenn die Dichtigkeit eine Function des Abstands des Punktes vom Kugelcentrum ist.

Bezeichnet man diesen Abstand mit r und setzt $\varrho = f(r)$, so hat man in Formel (a) das Differential des Trägheitsmoments der Masse in Bezug auf eine beliebige durch das Kugelcentrum gehende Gerade; das totale Trägheitsmoment ist daher:

$$\frac{8}{3}\pi\int_0^R f(r)r^4dr.$$

3) *Trägheitsaxen und Trägheitsmomente einer homogenen Masse, die von einer Rotationsfläche und von den Ebenen zweier Parallelkreise begrenzt ist.*

Jede durch die Rotationsaxe gehende Ebene ist eine Symmetrieebene dieser Masse; daher ist die Rotationsaxe eine der Hauptaxen für jeden auf ihr liegenden Punkt. Die quadratischen Momente bezüglich zweier, durch diese Axe gehender Ebenen sind einander gleich; daher ist das Grundellipsoid für jeden Punkt der Rotationsaxe eine Rotationsfläche um diese Axe; also ist jede in einem Punkt der Rotationsaxe auf ihr errichtete Senkrechte eine Hauptaxe für diesen Punkt.

Als Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z wählen wir einen beliebigen Punkt O auf der Rotationsaxe, als x-Axe die Richtung der Rotationsaxe und die Axen Oy und Oz irgendwie senkrecht darauf.

Man sieht leicht, dass man dann hat:

$$\int y^2dm = \int z^2dm = \frac{1}{2}\int(y^2+z^2)dm, \quad \int(x^2+z^2)dm = \int(x^2+y^2)dm,$$

d. h.

$$b = c = \frac{1}{2}A, \quad B = C = a + \frac{1}{2}A.$$

Man braucht also zur Bestimmung der drei Hauptmomente A, B, C nur die zwei Grössen A und a.

Es sei r der Abstand des Elements dm von der Axe Ox, φ der Winkel, den die Richtung von r mit der Ebene xOy bildet, $\sqrt{y^2+z^2} = f(x)$ die Gleichung der Rotationsfläche und ϱ die Dichtigkeit der Masse m. Dann ist

$$dm = \varrho r dr d\varphi dx, \quad y^2 + z^2 = r^2,$$

$$A = \varrho\int r^3 dr d\varphi dx, \quad a = \int x^2dm = \varrho\int x^2 r dr d\varphi dx, \quad m = \varrho\int r dr d\varphi dx,$$

wo die Integration nach φ von 0 bis 2π auszudehnen ist, die nach r von 0 bis $r = f(x)$ und endlich die nach x zwischen denjenigen Werthen dieser Coordinate, welche den die Masse m begrenzenden Parallelkreisen entsprechen. Bezeichnet man diese Werthe mit α und β und setzt $\alpha < \beta$ voraus, so folgt:

$$A = \frac{1}{2}\pi\varrho\int_\alpha^\beta [f(x)]^4dx, \quad a = \pi\varrho\int_\alpha^\beta x^2[f(x)]^2dx, \quad m = \pi\varrho\int_\alpha^\beta [f(x)]^2dx. \quad (b)$$

Specielle Fälle. 1) *Rotationscylinder von der Höhe h und einer Basis vom Radius r.*

In diesem Falle ist $f(x)$ eine constante Grösse r. Wählt man den

Punkt O im Massenmittelpunkte des Cylinders, so ist $\alpha = -\frac{1}{2}h$, $\beta = +\frac{1}{2}h$, und die Formeln (b) geben:

$$A = \tfrac{1}{2}\pi\varrho r^4 h\,,\quad a = \tfrac{1}{12}\pi\varrho r^2 h^3\,,\quad m = \pi\varrho r^2 h\,;$$

folglich ist:

$$A = \tfrac{1}{2}mr^2,\quad B = C = \tfrac{1}{4}m\,(r^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

2) *Rotationskegel von der Höhe h und einer Basis vom Radius R.*

Verlegt man den Coordinatenursprung O in die Spitze des Kegels, so ist $f(x) = \frac{R}{h}x$, und die Formeln (b) liefern:

$$A = \tfrac{3}{10}mR^2,\quad a = \tfrac{3}{5}mh^2;$$

folglich wird

$$B = C = \tfrac{3}{5}m\,(\tfrac{1}{4}R^2 + h^2).$$

Für das Trägheitsmoment bezüglich einer Axe, die durch den Massenmittelpunkt geht und auf der Kegelaxe senkrecht steht, ergiebt sich der Werth

$$\tfrac{3}{80}\,m(4R^2 + h^2).$$

43. Es giebt Fälle, in denen man unmittelbar ein System schiefwinkliger Axen Ox, Oy, Oz finden kann, die, wenn man sie als geradlinige Coordinatenaxen der x, y, z wählt, dieselben Bedingungen erfüllen, wie die Hauptaxen der Masse, nämlich die Bedingungen:

$$\int yz\,dm = 0,\quad \int zx\,dm = 0,\quad \int xy\,dm = 0. \tag{43}$$

Binet hat in seiner Abhandlung „Sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps“ gezeigt, dass solche Axen ein System conjugirter Diameter eines Ellipsoids darstellen, dessen Gleichung bezüglich dieser Axe

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} + \frac{z^2}{c_1} = 1 \tag{44}$$

ist, mit

$$a_1 = \int x^2 dm,\quad b_1 = \int y^2 dm,\quad c_1 = \int z^2 dm, \tag{45}$$

und dass die Hauptdiameter dieses Ellipsoids die Hauptaxen der Masse m im Punkte O sind.*)

Das zu Ox, Oy, Oz complementäre Axensystem, welches von den Normalen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ der Ebenen yOz, zOx, xOy

*) Den Beweis für diesen Satz und seine Anwendung auf Beispiele findet man in einer Abhandlung, die der Verfasser im Jahre 1857 der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Petersburg vorgelegt hat, s. Bulletin phys.-mathém., T. XII, Nr. 12 und 13.

gebildet wird, ist ein System conjugirter Diameter des Grundellipsoids (16).

Wir werden zuerst diesen zweiten Satz beweisen und dann daraus den obigen Binet'schen Satz ableiten.

Wir gehen zu diesem Zweck von dem Ausdrucke des quadratischen Moments Q bezüglich einer beliebigen durch den Punkt O gehenden Ebene P aus. Sind wieder α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Normale Ol der Ebene P mit den Coordinatenaxen bildet, und ist q der Abstand eines Punktes m (x, y, z) von der Ebene P, so hat man:

$$q = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Daher findet man mit Berücksichtigung der Bedingungen (43)

$$Q = \int q^2 dm = \alpha^2 \int x^2 dm + \beta^2 \int y^2 dm + \gamma^2 \int z^2 dm$$

oder:

$$Q = a_1 \alpha^2 + b_1 \beta^2 + c_1 \gamma^2. \tag{46}$$

Trägt man auf Θl eine Strecke $OM = \varrho = \frac{1}{\sqrt{Q}}$ auf und bezeichnet mit ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes M bezüglich der Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, so ist

$$\alpha = Q^{\frac{1}{2}} \xi \cos(\xi x), \quad \beta = Q^{\frac{1}{2}} \eta \cos(\eta y), \quad \gamma = Q^{\frac{1}{2}} \zeta \cos(\zeta z),$$

wodurch die Gleichung (46) übergeht in

$$a_1 \cos^2(\xi x) \xi^2 + b_1 \cos^2(\eta y) \eta^2 + c_1 \cos^2(\zeta z) \zeta^2 = 1,$$

oder

$$a' \xi^2 + b' \eta^2 + c' \zeta^2 = 1, \tag{47}$$

indem man

$$a_1 \cos^2(\xi x) = a', \quad b_1 \cos^2(\eta y) = b', \quad c_1 \cos^2(\zeta z) = c'$$

setzt. Aus der Construction des Radiusvectors $\varrho = \frac{1}{\sqrt{Q}}$ folgt, dass der geometrische Ort der Punkte M das Grundellipsoid ist; folglich ist (47) die Gleichung desselben bezüglich der Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Diese Gleichung enthält die Producte $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ nicht; daher sind die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ conjugirte Diameter des Grundellipsoids, was zu beweisen war. Da ferner

$$x \cos(\xi x), \quad y \cos(\eta y), \quad z \cos(\zeta z)$$

die vom Punkte m auf die Ebenen yOz, zOx, xOy gefällten

Perpendikel sind, so sind die Coefficienten der Gleichung (47), nämlich

$$a' = \int x^2 \cos^2(\xi x)\,dm,\quad b' = \int y^2 \cos^2(\eta y)\,dm,\quad c' = \int z^2 \cos^2(\zeta z)\,dm,$$

die quadratischen Momente bezüglich dieser Ebenen.

Bezeichnet man mit α_1, α_2, α_3 die Cosinus der Winkel yOz, zOx, xOy, mit Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$ und mit Δ_{rs} die

Derivirte derselben nach dem Elemente der r^{ten} Reihe und s^{ten} Colonne, so hat man nach den Formeln (7) und (8) des Capitels VIII der Kinematik (S. 149)

$$\cos(\xi x) = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{11}}},\quad \cos(\eta y) = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{22}}},\quad \cos(\zeta z) = \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{33}}};$$

daher wird:

$$a' = \frac{a_1 \Delta}{\Delta_{11}},\quad b' = \frac{b_1 \Delta}{\Delta_{22}},\quad c' = \frac{c_1 \Delta}{\Delta_{33}}.$$

Diese Formeln dienen zur Berechnung der Grössen a', b', c', wenn die drei Integrale (45) gefunden sind. Nach den Formeln (9) und (10) des Capitels VIII der Kinematik (S. 150) findet man die Cosinus der Winkel $\eta O \zeta$, $\zeta O \xi$, $\xi O \eta$, nämlich:

$$\omega_1 = \frac{\Delta_{23}}{\sqrt{\Delta_{22}\Delta_{33}}},\quad \omega_2 = \frac{\Delta_{31}}{\sqrt{\Delta_{33}\Delta_{11}}},\quad \omega_3 = \frac{\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{22}}}.$$

Die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2\omega_1\eta\zeta + 2\omega_2\zeta\xi + 2\omega_3\xi\eta = \frac{1}{Q}$$

ist die einer Kugel vom Mittelpunkte O und vom Radius $\varrho = \frac{1}{\sqrt{Q}}$. Ist nun Q eins der quadratischen Hauptmomente, so berührt diese Kugel das Ellipsoid (47) in den Endpunkten einer seiner Axen, und die Bedingung der Berührung liefert:

$$\frac{a'\xi}{\xi + \omega_3\eta + \omega_2\zeta} = \frac{b'\eta}{\omega_3\xi + \eta + \omega_1\zeta} = \frac{c'\zeta}{\omega_2\xi + \omega_1\eta + \zeta} = Q; \quad (48)$$

hieraus erhält man die Gleichungen einer der Axen des Ellipsoids, d. h. einer der Hauptaxen der Masse m:

$$\left(1-\frac{a'}{Q}\right)\xi+\omega_3\eta+\omega_2\zeta=0,$$
$$\omega_3\xi+\left(1-\frac{b'}{Q}\right)\eta+\omega_1\zeta=0, \qquad (49)$$
$$\omega_2\xi+\omega_1\eta+\left(1-\frac{c'}{Q}\right)\zeta=0.$$

Eliminirt man hieraus ξ, η, ζ, so erhält man zur Bestimmung von Q die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{a'}{Q}, & \omega_3, & \omega_2 \\ \omega_3, & 1-\frac{b'}{Q}, & \omega_1 \\ \omega_2, & \omega_1 & 1-\frac{c'}{Q} \end{vmatrix}=0. \qquad (50)$$

Alle drei Wurzeln dieser Gleichung sind reell und positiv und geben die Werthe der quadratischen Hauptmomente für den Punkt O, die wir in den vorigen Paragraphen mit a, b, c bezeichnet hatten.

Statt der Coordinaten ξ, η, ζ kann man in die Gleichungen (48) die Coordinaten x, y, z bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz einführen. Hierzu hat man nach den Formeln des Capitels VIII der Kinematik:

$$\xi\cos(\xi x)=x+\alpha_3 y+\alpha_2 z, \quad \xi+\omega_3\eta+\omega_2\zeta=x\cos(\xi x),$$
$$\eta\cos(\eta y)=\alpha_3 x+y+\alpha_1 z, \quad \omega_3\xi+\eta+\omega_1\zeta=y\cos(\eta y),$$
$$\zeta\cos(\zeta z)=\alpha_2 x+\alpha_1 y+z, \quad \omega_2\xi+\omega_1\eta+\zeta=z\cos(\zeta z).$$

Die Gleichungen (48) gehen dann in die folgenden über:

$$\frac{a_1(x+\alpha_3 y+\alpha_2 z)}{x}=\frac{b_1(\alpha_3 x+y+\alpha_1 z)}{y}=\frac{c_1(\alpha_2 x+\alpha_1 y+z)}{z}=Q, \qquad (51)$$

oder:

$$(a_1-Q)x+a_1\alpha_3 y+a_1\alpha_2 z=0,$$
$$b_1\alpha_3 x+(b_1-Q)y+b_1\alpha_1 z=0, \qquad (52)$$
$$c_1\alpha_2 x+c_1\alpha_1 y+(c_1-Q)z=0.$$

Statt der Gleichung (50) kann man diejenige wählen, die man durch Elimination von x, y, z aus den Gleichungen (52) erhält, nämlich:

$$\begin{vmatrix} a_1-Q, & a_1\alpha_3, & a_1\alpha_2 \\ b_1\alpha_3, & b_1-Q, & b_1\alpha_1 \\ c_1\alpha_2, & c_1\alpha_1, & c_1-Q \end{vmatrix}=0. \qquad (53)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die quadratischen Hauptmomente a, b, c.

Auch findet man die Gleichungen (52) und (53), wenn man den Hauptdiameter des Ellipsoids sucht, dessen Gleichung bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz ist:

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} + \frac{z^2}{c_1} = 1 ; \tag{54}$$

denn die Bedingung, dass dasselbe die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha_1 yz + 2\alpha_2 zx + 2\alpha_3 xy = Q$$

berühren soll, giebt die Gleichungen (51).

Man hat also den Satz: *Die Hauptaxen der Masse m im Punkte O sind die Axen des Ellipsoids (54), in welchem die schiefwinkligen Axen Ox, Oy, Oz, die die Bedingungen (43) erfüllen, ein System conjugirter Diameter bilden, dessen Semidiameter gleich $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{b_1}$, $\sqrt{c_1}$ sind.*

Dies ist der Binet'sche Satz.

Beispiele. 1) *Hauptcentralaxen eines homogenen schiefwinkligen Parallelepipedons.*

Es seien p, q, r drei zusammenstossende Kanten des Parallelepipedons, O sein Mittelpunkt, Ox, Oy, Oz drei, den Kanten parallele Axen und x, y, z die Coordinaten des Massenelements dm. Offenbar gelten auch hier, wie im Falle des rechtwinkligen Parallelepipedons, die drei Gleichungen

$$\int yz\,dm = 0\,, \int zx\,dm = 0\,, \int xy\,dm = 0\,;$$

zugleich ist aber auch:

$$a_1 = \frac{m}{12}p^2\,,\; b_1 = \frac{m}{12}q^2\,,\; c_1 = \frac{m}{12}r^2\,;$$

daher sind die Axen Ox, Oy, Oz conjugirte Diameter des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{m}{12}. \tag{a}$$

Die Perpendikel $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, die man vom Trägheitsmittelpunkte auf die Seitenflächen des Parallelepipedons fällen kann, sind conjugirte Diameter des Grundellipsoids

$$p^2\cos^2(\xi x)\xi^2 + q^2\cos^2(\eta y)\eta^2 + r^2\cos^2(\zeta z)\zeta^2 = \frac{12}{m}; \tag{b}$$

die Hauptdiameter des Ellipsoids (a) sind die Hauptcentralaxen der Masse m.

Das Ellipsoid (a) hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass man ein anderes ihm ähnliches Ellipsoid construiren kann, das durch die

Eckpunkte des Parallelepipedons hindurchgeht, d. h. das diesem letzteren umschrieben ist.

Die Gleichung eines dem (a) ähnlichen Ellipsoids ist nämlich

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = \varepsilon^2,$$

wo ε eine willkürliche Constante bedeutet. Bestimmt man nun ε so, dass dieser Gleichung die Coordinaten eines der Eckpunkte des Parallelepipedons genügen, z. B. die Coordinaten $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{r}{2}\right)$, so findet man $\varepsilon^2 = \frac{3}{4}$; das Ellipsoid

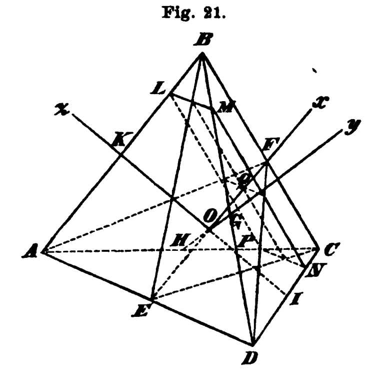
$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{3}{4}$$

geht aber nicht nur durch jenen einen Eckpunkt, sondern auch durch die übrigen.

2) *Hauptcentralaxen eines homogenen Tetraeders.*

Es sei $ABCD$ (Fig. 21) ein homogenes Tetraeder, O der Mittelpunkt seiner Masse, der, wie wir in § 26 sahen, der Schnittpunkt der Verbindungslinien EF, GH, IK der Mitten der gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders ist. Wir wollen nun beweisen, dass die längs diesen Geraden gerichteten Axen Ox, Oy, Oz die Bedingungen (43) erfüllen.

Fig. 21.



Jede der Ebene yOz und den Kanten BC und AD parallele Ebene giebt als Schnitt mit dem Tetraeder ein Parallelogramm $LMNP$; die Ebenen AFD und BCE, die sich in der Axe Ox schneiden, halbiren die gegenüberliegenden Seiten dieses Parallelogramms. Daher liegt der Mittelpunkt der Fläche $LMNP$ auf der Axe Ox, so dass die beiden über die Fläche dieses Parallelogramms sich erstreckenden Integrale $\int\int y\,dy\,dz$ und $\int\int z\,dy\,dz$ gleich Null sind, woraus folgt:

$$\int\int\int xy\,dx\,dy\,dz = \int x\,dx \int\int y\,dy\,dz = 0,$$
$$\int\int\int xz\,dx\,dy\,dz = \int x\,dx \int\int z\,dy\,dz = 0.$$

Ebenso findet man, dass $\int\int\int yz\,dx\,dy\,dz = 0$ ist. Bezeichnet man mit ϱ die Dichtigkeit des Tetraeders und mit Δ die Determinante des Axensystems, so ist

$$dm = \varrho \Delta^{\frac{1}{2}} dx\,dy\,dz;$$

daher wird:

$$\int yz\,dm = \varrho \Delta^{\frac{1}{2}} \int yz\,dx\,dy\,dz = 0,$$
$$\int zx\,dm = \varrho \Delta^{\frac{1}{2}} \int zx\,dx\,dy\,dz = 0,$$
$$\int xy\,dm = \varrho \Delta^{\frac{1}{2}} \int xy\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Es seien nun p und p' die Längen der gegenüberliegenden Kanten AD und BC, durch deren Mitten die Axe Ox geht, q und q' die Längen der Kanten AC und BD, r und r' die der Kanten DC und AB, α, β, γ die Längen der Strecken EF, HG und IK. Es ist nun leicht zu zeigen, dass

$$\alpha^2 = \tfrac{1}{4}\,(q^2 + q'^2 + r^2 + r'^2 - p^2 - p'^2),$$
$$\beta^2 = \tfrac{1}{4}\,(r^2 + r'^2 + p^2 + p'^2 - q^2 - q'^2),$$
$$\gamma^2 = \tfrac{1}{4}\,(p^2 + p'^2 + q^2 + q'^2 - r^2 - r'^2);$$

$$a_1 = \int x^2 dm = \frac{m}{20}\,\alpha^2,$$
$$b_1 = \int y^2 dm = \frac{m}{20}\,\beta^2,$$
$$c_1 = \int z^2 dm = \frac{m}{20}\,\gamma^2.$$

Mithin sind die Axen Ox, Oy, Oz conjugirte Diameter des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = \frac{m}{20}. \tag{a}$$

Die Axen dieses Ellipsoids sind die Hauptcentralaxen des Tetraeders. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass das dem (a) ähnliche Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = \frac{1}{4}$$

durch die Mitten aller Kanten geht; daher sind die drei Strecken α, β, γ die Längen der conjugirten Diameter dieses Ellipsoids.

Ein anderes ähnliches Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = \frac{3}{4}$$

geht durch die Eckpunkte des Tetraeders, d. h. kann ihm umschrieben werden; denn die Coordinaten der Eckpunkte

$$A\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right), B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right), C\left(\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}\right),$$
$$D\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}\right)$$

genügen seiner Gleichung.

Man bestimme noch die Hauptcentralaxen und die Hauptcentral-

momente: *a*) für ein schiefes dreiseitiges Prisma, *b*) für eine vielseitige Pyramide und *c*) für einen schiefen Kegel mit elliptischer Basis.*)

44. Betrachten wir als speciellen Fall die Bestimmung der Hauptaxen und Hauptmomente für die Masse eines ebenen Flächenraumes. Wir nehmen hierzu den Coordinatenursprung O und die Axen Ox und Oy in der die Masse m enthaltenden Ebene; Oz stehe senkrecht auf derselben, so dass $z = 0$ ist für alle Elemente dm; daher ist:

$$\int yz\,dm = 0, \quad \int zx\,dm = 0.$$

Dies zeigt, dass die Axe Oz eine Hauptaxe für den als Coordinatenursprung gewählten Punkt O ist. Das quadratische Moment $c = \int z^2 dm$ bezüglich der Ebene xOy ist gleich Null; daher geht das Grundellipsoid in einen elliptischen Cylinder über, dessen Gleichung

$$a\xi^2 + b\eta^2 + 2g\xi\eta = 1 \tag{55}$$

ist. Dies ist auch für $z = 0$ die Gleichung der die Basis des Cylinders bildenden Ellipse. Wählt man die Axen dieser Ellipse zu Coordinatenaxen Ox und Oy, so hat man $g = \int xy\,dm = 0$, d. h. *die Axen der Ellipse (55) sind die Hauptaxen der Masse m des Flächenraumes.*

Ist g nicht gleich Null, so kann man die Gleichungen der in der Ebene xOy liegenden Hauptaxen aus den Bedingungen für die Berührung der Ellipse (55) mit dem Kreise

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{Q}$$

ableiten, wobei unter Q das quadratische Moment bezüglich einer durch die Axe Oz gehenden Ebene zu verstehen ist. Diese Bedingungen sind

$$\frac{a\xi + g\eta}{\xi} = \frac{g\xi + b\eta}{\eta} = Q,$$

oder:

$$\begin{aligned} (a - Q)\xi + g\eta &= 0, \\ g\xi + (b - Q)\eta &= 0; \end{aligned} \tag{56}$$

*) Mémoire sur les axes et les moments principaux des corps homogènes par J. Somov. Bulletin phys.-math. de l'Académie des Sciences de St. Pétersburg. T. XII Nr. 12 und 13.

zugleich muss die Gleichung zweiten Grades

$$(a - Q)(b - Q) - g^2 = 0$$

bestehen, deren Wurzeln die quadratischen Hauptmomente des Punktes O sind. Bestimmt man diese Wurzeln und substituirt sie in die Gleichung (56), so erhält man die Gleichungen der zwei in der Ebene der Fläche m gelegenen Hauptaxen. Sind Ox und Oy zwei schiefwinklige, in der Ebene der Masse m gelegene Coordinatenaxen, die der Bedingung

$$\int xy\,dm = 0$$

genügen, so sind die auf ihnen senkrechten Geraden $O\xi$ und $O\eta$ conjugirte Diameter der Ellipse (55). Bezeichnet man mit a' und b' die quadratischen Momente bezüglich der auf $O\xi$ und $O\eta$ senkrechten Ebenen, so lässt sich die Gleichung der Ellipse (55) auch in der Form darstellen:

$$a'\xi^2 + b'\eta^2 = 1.$$

Die Axen Ox und Oy sind conjugirte Diameter der Ellipse

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} = 1, \tag{57}$$

worin $a_1 = \int x^2 dm$, $b_1 = \int y^2 dm$ ist; diese Ellipse hat dieselben Axen wie die Ellipse (55), so dass auch ihre Axen die Hauptmomente der Masse m für den Punkt O darstellen. Der Beweis für alle diese Sätze ergiebt sich durch Specialisirung aus den Entwickelungen der vorhergehenden Paragraphen. Wir wollen jedoch einen directen Beweis geben und die Gleichungen der Hauptaxen bezüglich des Axensystems Ox, Oy unmittelbar ableiten. Bezeichnet man mit Q das quadratische Moment $\int q^2 dm$ bezüglich einer beliebigen, durch den Punkt O gehenden und auf der Ebene xOy senkrechten Ebene P und mit α, β die Cosinus der Winkel, welche die Normale dieser Ebene mit den Axen Ox und Oy bildet, so ist

$$Q = a_1\alpha^2 + b_1\beta^2,$$

woraus sich die Gleichung des Grundellipsoids

$$a'\xi^2 + b'\eta^2 = 1 \tag{58}$$

ergiebt, wenn ξ und η die Coordinaten des Endpunktes einer auf der Normalen der Ebene P aufgetragenen Strecke gleich

$\frac{1}{\sqrt{Q}}$ und a', b' die Momente bezüglich der zu den Axen $O\xi$ und $O\eta$ senkrechten Ebenen bedeuten. Ausserdem hat man die Relationen:

$$a' = a_1 \cos^2(\xi x), \quad b' = b_1 \cos^2(\eta y).$$

Die Gleichung (58), die das Product $\xi\eta$ nicht enthält, zeigt, dass die Axen $O\xi$ und $O\eta$ conjugirte Durchmesser der Grundellipse sind. Die Gleichung einer der Axen der Ellipse, d. h. einer der Hauptaxen der Masse m für den Punkt O lässt sich aus der Bedingung ableiten, dass die Ellipse den Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\alpha\xi\eta = \frac{1}{Q},$$

worin α den Cosinus des Winkels yOx bezeichnet, berühren soll. Diese Bedingung giebt:

$$\frac{a'\xi}{\xi - \alpha\eta} = \frac{b'\eta}{\eta - \alpha\xi} = Q;$$

nun ist aber:

$$a'\xi = a_1\xi \cos^2(\xi x) = a_1(x + \alpha y) \cos(\xi x),$$
$$b'\eta = b_1\eta \cos^2(\eta y) = b_1(\alpha x + y) \cos(\eta y),$$
$$\xi - \alpha\eta = x \cos(\xi x), \quad \eta - \alpha\xi = y \cos(\eta y);$$

folglich wird:

$$\frac{a_1(x + \alpha y)}{x} = \frac{b_1(\alpha x + y)}{y} = Q;$$

es ist also die Gleichung einer Hauptaxe in Bezug auf die schiefwinkligen Axen Ox und Oy eine der folgenden:

$$\begin{aligned} (a_1 - Q)\,x + a_1\alpha y &= 0, \\ b_1\alpha x + (b_1 - Q)y &= 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Da diese beiden Gleichungen gleichzeitig bestehen müssen, so ist:

$$(a_1 - Q)(b_1 - Q) - a_1 b_1 \alpha^2 = 0. \tag{60}$$

Es ist leicht zu sehen, dass (59) die Gleichungen der Axen der Ellipse

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} = 1$$

sind. Die quadratischen Hauptmomente a und b erhält man durch Auflösung der Gleichung (60) nach Q; sie sind auch die Hauptträgheitsmomente bezüglich der Hauptaxen. Die

Summe $a + b$ ist das Trägheitsmoment der Masse m bezüglich der auf der Fläche m senkrechten Axe Oz. Diese Summe ist gleich dem mit umgekehrtem Zeichen genommenen Coefficienten $a_1 + b_1$ der ersten Potenz von Q in der Gleichung (60).

Beispiele für die Bestimmung der Hauptcentralaxen und Hauptcentralmomente der Masse eines ebenen Flächenraumes.

1) *Homogene Fläche einer auf ihre Hauptdurchmesser bezogenen Ellipse*

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1.$$

Die Axen Ox, Oy dieser Ellipse sind offenbar die Hauptcentralaxen ihrer Fläche. Die quadratischen Hauptmomente bezüglich der zu Ox und Oy senkrechten Ebenen sind $\frac{1}{4}mp^2$ und $\frac{1}{4}mq^2$, wenn m die Masse der Ellipsenfläche bedeutet, die gleich dem Producte der Fläche πpq in die Dichtigkeit ϱ ist. Die Trägheitsmomente bezüglich der Axen Ox, Oy sind $\frac{1}{4}mq^2$ und $\frac{1}{4}mp^2$, und das Trägheitsmoment bezüglich der auf der Fläche senkrechten Axe Oz ist gleich deren Summe $\frac{1}{4}(p^2 + q^2)m$.

2) *Homogene Fläche eines schiefwinkligen Parallelogramms, dessen zusammenstossende Seiten p und q sind, während der Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels gleich α ist.*

Nimmt man zwei durch den Mittelpunkt des Parallelogramms gelegte Parallele zu den Seiten p und q als Coordinatenaxen Ox und Oy, so ist

$$\int xy\,dm = 0\,;$$

daher sind diese Geraden conjugirte Durchmesser der Ellipse

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} = 1\,,$$

wo $a_1 = \frac{m}{12}p^2$, $b_1 = \frac{m}{12}q^2$, d. h. der Ellipse:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = \frac{m}{12}. \tag{a}$$

Dem Parallelogramm kann man eine der Ellipse (a) ähnliche einbeschreiben, nämlich die Ellipse

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = \frac{1}{4}\,; \tag{b}$$

die Längen der in die Richtungen Ox und Oy fallenden conjugirten Durchmesser derselben sind p und q. Die Hauptdurchmesser der Ellipsen (a) oder (b) sind die Hauptaxen der Fläche des Parallelogramms.*) Die Gleichung (60) giebt für die Hauptträgheitsmomente die Werthe:

---

*) Kennt man die conjugirten Durchmesser p und q der Ellipse (b), so lassen sich die Hauptdurchmesser leicht construiren. S. Analyt. Geom. von Somoff, Petersb. 1867 (russ.).

$$a = \frac{m}{24}\left[p^2 + q^2 + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4\alpha^2 p^2 q^2}\right],$$

$$b = \frac{m}{24}\left[p^2 + q^2 - \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4\alpha^2 p^2 q^2}\right],$$

$$a + b = \frac{m}{12}(p^2 + q^2).$$

3) *Homogene Dreiecksfläche.*

Es sei (Fig. 22) ABC das Dreieck und AD die Verbindungslinie des Scheitels A mit der Mitte D der gegenüberliegenden Seite BC. Ferner sei $OD = \frac{1}{2}AO$, so dass O der Massenmittelpunkt der Dreiecksfläche ist. Die Richtung von OD als Ox und die Parallele zu der Seite BC durch O als Oy bilden ein System von Coordinatenaxen, für welches die Bedingung $\int xy dm = 0$ erfüllt ist; daher sind diese Axen conjugirte Durchmesser der Ellipse (57). Setzt man nun $AO = p$, $BD = q$, so findet man:

Fig. 22.

$$a_1 = \int x^2 dm = \frac{m}{8}p^2, \; b_1 = \int y^2 dm = \frac{m}{6}q^2.$$

Also sind die Axen Ox und Oy conjugirte Durchmesser der Ellipse

$$\frac{x^2}{3p^2} + \frac{y^2}{4q^2} = \frac{m}{24}. \tag{a}$$

Die dieser ähnliche Ellipse

$$\frac{x^2}{3p^2} + \frac{y^2}{4q^2} = \frac{1}{3}$$

geht durch die Eckpunkte des Dreiecks. Ihre Axen sind die Hauptcentralaxen der Dreiecksfläche.

In den folgenden Werken findet man noch weitere Untersuchungen über Hauptaxen und Hauptmomente:

J. Binet: „Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps" in dem Journal de l'Éc. Polyt., 16me cahier (1813), p. 41.

Cauchy: Exercices de mathématiques. T. II, p. 93.

W. Thomson: „On the principal axes of a solid body" in dem Cambridge and Dublin Math. Journ. Vol. I (1846), p. 127 und 195.

A. Cayley: „Note on a geometrical theorem contained in the preceding paper", ib., p. 207.

R. Townsend: „On the principal axes of a body, their moments of inertia and distribution in space", ib., p. 209.

Ad. Guibert: „Note sur les axes principaux des corps“ in dem Journ. de l'Éc. Polyt., 25me cahier (1837), p. 118.

A. M. Ampère: „Sur quelques nouvelles propriétés des axes permanents de rotation des corps“, in den Mémoires de l'Institut (Savans étrangers), 1805.

Haton de la Goupillière: „Mémoire sur une nouvelle théorie de la géométrie des masses“ in dem Journ. de l'Éc. Polyt. 37me cahier, p. 35.

Hesse: „Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes“, 3. Aufl. (1876).

Jullien: Problèmes de mécanique rationnelle, 2. éd. (1866), T. II, chap. VI.

Moigno: Leçons de Mécanique analytique: Statique. (1868).

In der Abhandlung „Mémoire sur les axes et les moments principaux des corps homogènes“ habe ich gezeigt, wie man die Gleichung des Centralellipsoids für ein Massensystem findet, wenn die Hauptcentralaxen und die Hauptcentralträgheitsmomente jeder Masse bekannt sind.

D. Variationen von Massen und Raumgrössen. — Differentialparameter zweiter Ordnung von Punktfunctionen. — Thermometrische Functionen. — Die Green'schen Formeln.

45. Es sei m die in der Raumgrösse E enthaltene Masse; dieselbe habe in dem, dem Raume E angehörenden Punkte M die Dichtigkeit ϱ, welche eine continuirliche Function des Punktes M und einer Variablen t sei. Diese Variable wollen wir als die Zeit ansehen, obwohl sie auch eine Grösse anderer Art bedeuten kann. Man denke sich nun, dass sich zugleich mit der Aenderung von t alle Elemente der Masse m bewegen, ohne sich zu trennen, d. h. so, dass sie während der Zeit der Bewegung eine continuirliche Raumgrösse von derselben Art wie E einnehmen. Erhält nun t ein unendlich kleines Increment δt, so erleidet M eine Verschiebung MM', und die Raumgrösse E geht in E' über, welche letztere sich von E sowohl nach Gestalt als nach Lage unendlich wenig unterscheidet. Zugleich geht auch die Dichtigkeit ϱ in die Dichtigkeit ϱ' des Punktes M' und die Masse $m = \int \varrho dE$ in

$m' = \int \varrho' dE'$ über. Das Increment $m' - m$ ist im Allgemeinen eine Function von t und δt; behält man darin nur die Glieder mit der ersten Potenz von δt bei, so hat man die Variation der Masse m, nämlich

$$\delta m = \delta \int \varrho dE,$$

die sich nach den allgemeinen Regeln der Variationsrechnung für die Variation einfacher und mehrfacher Integrale bestimmen lässt. Wir wollen im Folgenden die Ausdrücke für die Variation der Masse einer Linie, einer Fläche und eines Volumens ableiten und einige sich daraus ergebende Schlussfolgerungen anknüpfen.

46. Gesetzt, E sei eine Linie AB, deren Länge durch das Integral

$$s = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{ds}{d\alpha} d\alpha$$

dargestellt ist, wobei α eine der Coordinaten des Punktes M oder auch irgend eine andere Variable ist, als deren Functionen jene Coordinaten ausgedrückt sind; α_1 und α_2 sind die Werthe von α in den Punkten A und B. Dann ist

$$m = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varrho \frac{ds}{d\alpha} d\alpha$$

und

$$\delta m = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta\left(\varrho \frac{ds}{d\alpha}\right) d\alpha + \left(\varrho \frac{ds}{d\alpha}\right)_2 \delta \alpha_2 - \left(\varrho \frac{ds}{d\alpha}\right)_1 \delta \alpha_1,$$

wenn $\left(\varrho \frac{ds}{d\alpha}\right)_1$ und $\left(\varrho \frac{ds}{d\alpha}\right)_2$ die Werthe der Function $\varrho \frac{ds}{d\alpha}$ für die Grenzpunkte A und B bedeuten; dabei ist $\delta\left(\varrho \frac{ds}{d\alpha}\right)$ unter Voraussetzung eines constanten α zu bestimmen.

47. Gesetzt, es sei E ein von einer beliebigen Begrenzung s eingeschlossener Flächenraum S; q_1, q_2, q_3 seien die Coordinaten des Punktes M, zwischen denen die Gleichung $\varphi(q_1, q_2, q_3) = 0$ besteht; endlich sei $dS = k dq_1 dq_2$ ein Differentialelement, wobei k eine Function der Coordinaten ist,

die sich nach einer der Formeln (6) § 4 ausdrücken lässt. Man hat in diesem Falle $m = \int \varrho dS$.

Geht nun t in $t + \delta t$ über, so erleidet der Punkt M die Verschiebung MM'; seine Coordinaten erhalten die Variationen δq_1, δq_2, δq_3, die im Allgemeinen Functionen der Grössen q_1, q_2, q_3, t und δt sind und zugleich mit δt verschwinden. Ausser der Verschiebung MM' wollen wir noch die Verschiebung $M\mu$ längs der Coordinatenlinie (q_1, q_2) ins Auge fassen. Es ist nämlich μ ein Punkt auf der geänderten Fläche S', der mit dem Punkte M zwei gemeinschaftliche Coordinaten q_1 und q_2 und mit dem Punkte M' eine gemeinschaftliche Coordinate $q_3 + \delta q_3$ hat. Das dem Punkte μ entsprechende Element dS' der Fläche S' hat zum Ausdruck die Formel $k_1 dq_1 dq_2$, wo k_1 der Werth von k im Punkte μ ist. Derjenige Theil S_1 der Fläche S', der alle, den sämmtlichen Punkten der Fläche S entsprechenden Lagen des Punktes μ enthält, ist von einer gewissen Begrenzung s_1 eingeschlossen; die Masse dieses Flächentheils hat das Integral $m_1 = \int \varrho_1 k_1 dq_1 dq_2$ zum Ausdruck, in dem die Grenzen dieselben sind, wie die des Integrals $m = \int \varrho k dq_1 dq_2$; daher ist:

$$m_1 - m = \int (\varrho_1 k_1 - \varrho k) dq_1 dq_2.$$

Vernachlässigt man unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als δt, so erhält man die partielle Variation

$$\delta_1 m = \int \delta_1 (\varrho k) dq_1 dq_2, \tag{1}$$

wo also δ_1 die Variation unter der Voraussetzung bedeutet, dass $\delta q_1 = 0$, $\delta q_2 = 0$. Um die totale Variation δm zu erhalten, muss man zu $\delta_1 m$ die Masse desjenigen Theils der Fläche S' hinzufügen, der zwischen den Begrenzungen s' und s_1 enthalten ist und der eine unendlich kleine Dimension von derselben Ordnung wie δt hat. Diese Masse lässt sich durch das Integral

$$\int \varrho_1 \cdot \mu M' \cdot \cos(\mu M', n') ds_1 \tag{2}$$

ausdrücken, das über die Begrenzung s_1 zu erstrecken ist; dabei bedeutet n' die Normale der Begrenzung s_1 in dem betreffenden Punkte, die bezüglich s_1 nach aussen gerichtet ist und die Fläche S_1 berührt. Vernachlässigt man unter dem In-

tegralzeichen unendlich kleine Grössen von höherer Ordnung als δt, so kann man die Dichtigkeit ϱ_1 durch die Dichtigkeit ϱ im Punkte M ersetzen, das Element ds_1 durch das Element ds der Begrenzung s und die Normale n' durch die Normale n dieser Begrenzung im Punkte M, die bezüglich s nach aussen gerichtet ist und die Fläche S berührt; endlich kann man statt der Verschiebung $\mu M'$ die den Variationen δq_1 und δq_2 entsprechende Verschiebung σ des Punktes M auf der Fläche S setzen. Dadurch erhält man statt des Integrals (2) nunmehr das über die Begrenzung s ausgedehnte Integral

$$\int \varrho \sigma \cos(\sigma n) ds. \tag{3}$$

Zerlegt man nun die Verschiebung σ in die beiden Verschiebungen σ_1 und σ_2 längs den Schnittlinien der Fläche S mit den Coordinatenflächen (q_2) und (q_1) und betrachtet q_1 und q_2 als Coordinaten eines Punktes der Fläche S, so hat man, wenn (vgl. Kinematik, Cap. IX) a_1 und a_2 die reciproken, h_1 und h_2 die directen Parameter dieser Coordinaten sind, die Beziehungen $\sigma_1 = a_1 \delta q_1$, $\sigma_2 = a_2 \delta q_2$ und

$$\sigma \cos(\sigma n) = a_1 \delta q_1 \cos(a_1 n) + a_2 \delta q_2 \cos(a_2 n);$$

dadurch geht das Integral (3) über in die Summe

$$\int \varrho a_1 \cos(a_1 n) \delta q_1 ds + \int \varrho a_2 \cos(a_2 n) \delta q_2 ds.$$

Da nun $k = a_1 a_2 \sin(a_1 a_2)$ ist und

$$a_1 h_1 \sin(a_1 a_2) = 1, \quad a_2 h_2 \sin(a_1 a_2) = 1,$$

so ist

$$a_1 = k h_2, \quad a_2 = k h_1;$$

folglich wird:

$$\int \varrho \sigma \cos(\sigma n) ds = \int \varrho k h_2 \cos(a_1 n) \delta q_1 ds + \int \varrho k h_1 \cos(a_2 n) \delta q_2 ds.$$

Diese beiden über die Begrenzung s auszudehnenden Integrale lassen sich vermittelst der Formeln (7) und (8) § 5 in solche umformen, die sich über die Fläche S erstrecken, nämlich:

$$\int \varrho k h_2 \cos(a_1 n) \delta q_1 ds = \int \frac{\partial(\varrho k \delta q_1)}{\partial q_1} dq_1 dq_2,$$

$$\int \varrho k h_1 \cos(a_2 n) \delta q_2 ds = \int \frac{\partial(\varrho k \delta q_2)}{\partial q_2} dq_1 dq_2;$$

folglich wird:

$$\int \varrho\sigma\cos(\sigma n)ds = \int \left[\frac{\partial(\varrho k\delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\varrho k\delta q_2)}{\partial q_2}\right] dq_1 dq_2 . \quad (4)$$

Addirt man dies zu dem Ausdruck (1), so erhält man die totale Variation

$$\delta m = \int \left[\delta_1(\varrho k) + \frac{\partial(\varrho k\delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\varrho k\delta q_2)}{\partial q_2}\right] dq_1 dq_2 \quad (5)$$

in Form eines über die Fläche S auszudehnenden Integrals.*)

Setzt man voraus, dass für alle Punkte der Fläche S $\varrho = 1$ und unveränderlich ist, so wird $m = S$, und die Formel (5) giebt als Variation der Fläche:

$$\delta S = \int \left[\delta_1 k + \frac{\partial(k\delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(k\delta q_2)}{\partial q_2}\right] dq_1 dq_2 . \quad (6)$$

Da aber

$$\delta_1(\varrho k) + \frac{\partial(\varrho k)}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial(\varrho k)}{\partial q_2}\delta q_2 = \delta(\varrho k)$$

ist, so lassen sich die Formeln (5) und (6) auch in folgender Form schreiben:

$$\delta m = \int \left[\delta(\varrho k) + \varrho\left(\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial\delta q_2}{\partial q_2}\right) k\right] dq_1 dq_2 , \quad (7)$$

$$\delta S = \int \left[\delta k + \left(\frac{\partial\delta q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial\delta q_2}{\partial q_2}\right) k\right] dq_1 dq_2 . \quad (8)$$

Wenn die Verschiebungen der Punkte M der Fläche S auf der Fläche selbst vor sich gehen, so ist $\delta q_3 = 0$, $\delta_1 k = 0$, $\delta_1\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial t}\delta t$; nach Formel (5) und (6) ergiebt sich dann:

$$\delta m = \int \left[k\frac{\partial\varrho}{\partial t}\delta t + \frac{\partial(\varrho k\delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\varrho k\delta q_2)}{\partial q_2}\right] dq_1 dq_2 , \quad (9)$$

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial(k\delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(k\delta q_2)}{\partial q_2}\right] dq_1 dq_2 . \quad (10)$$

Verschieben sich die Punkte der Fläche S derart, dass die Begrenzung s sich nicht ändert, so hat man für die Punkte der Begrenzung $\delta q_1 = 0$, $\delta q_2 = 0$, so dass das Integral (4) zu Null wird; es ist dann:

---

*) Diese Formel lässt sich direct aus der Formel ableiten, die Ostrogradsky für die Variation eines vielfachen Integrals aufgestellt hat. S. Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples. Mémoires de l'Académie de St. Pétersb. VI Série, T. I.

$$\delta m = \int \delta_1 (\varrho k) dq_1 dq_2,$$

$$\delta S = \int \delta_1 (k) dq_1 dq_2.$$

Wir werden nun einige aus den abgeleiteten Formeln sich ergebende Folgerungen in Betracht ziehen.

48. Wenn während der Zeit der Verschiebung die Masse jedes Theils der Fläche S unverändert bleibt, so hat man in der Formel (5) für beliebige Grenzen des Integrals $\delta m = 0$ zu setzen. Dies erfordert aber, dass der Ausdruck unter dem Integralzeichen verschwindet:

$$\delta_1 (\varrho k) + \frac{\partial (\varrho k \delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (\varrho k \delta q_2)}{\partial q_2} = 0;$$

dies lässt sich (vergl. Formel (7)) auch in folgender Form schreiben:

$$\delta (\varrho k) + \varrho k \left(\frac{\partial \delta q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \delta q_2}{\partial q_2} \right) = 0.$$

Eine solche Gleichung, welche eine Beziehung zwischen den Variationen der Coordinaten ausdrückt und die Verschiebungen der Elemente einer Masse m bedingt, die ihre Grösse unverändert und continuirlich bleibt, heisst die *Continuitätsgleichung der Masse.*

49. Dividirt man den Ausdruck (10) durch [illegible] man die Derivirte nach der Zeit

$$\frac{\delta S}{\delta t} = \int \left[\frac{\partial (k q'_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (k q'_2)}{\partial q_2} \right] dq_1 dq_2,$$

wo q'_1 und q'_2 die Derivirten der Coordinaten [illegible] sind. Diese Grösse stellt eine Art von [illegible] Ausdehnung der Fläche dar, die Ausdehnung [illegible] einheit. Dividirt man sie durch S, so erhält man [illegible] *Ausdehnung der quadratischen Einheit* [illegible]

$$\frac{1}{S} \frac{\delta S}{\delta t} = \frac{1}{S} \int \left[\frac{\partial (k q'_1)}{\partial q_1} + \text{[illegible]} \right] \text{[illegible]}$$

Dieselbe ist das arithmetische Mittel [illegible] die Function

$$\frac{1}{k} \left[\frac{\partial (k q'_1)}{\partial q_1} + \text{[illegible]} \right]$$

für die verschiedenen Punkte der Fläche, [illegible] man beide Dimensionen von S [illegible]

alle Punkte der Fläche S mit dem Punkte $M(q_1, q_2)$ zusammenfallen, so erhält man in der Grenze:

$$\lim \frac{1}{S}\frac{\delta S}{\delta t} = \frac{1}{k}\left[\frac{\partial(kq'_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(kq'_2)}{\partial q_2}\right]. \qquad (14)$$

Diesen Grenzwerth der quadratischen Ausdehnung kann man als die quadratische Ausdehnung eines einzelnen den Punkt M enthaltenden Elementes dS der Fläche S ansehen. Wir werden denselben die *Ausdehnung der Fläche im Punkte* M nennen. Dieselbe hängt nur von dem Orte des Punktes M auf der Fläche S und von der Geschwindigkeit der Bewegung dieses Punktes ab. Setzt man in Formel (4) $\varrho = 1$ und $\sigma = v\delta t$, wo v die Geschwindigkeit eines Punktes der Begrenzung s ist, so erhält man nach dieser Formel, da $\delta_1 k = 0$ ist:

$$\frac{\delta S}{\delta t} = \int v \cos(vn) ds. \qquad (15)$$

Somit ist die Ausdehnung durch ein über die Begrenzung der Fläche auszudehnendes Integral ausgedrückt und hängt von den Geschwindigkeiten der Bewegung der Begrenzungspunkte ab. Hieraus erhält man für die Ausdehnung im Punkte M den Ausdruck:

$$\lim \frac{1}{S}\frac{\delta S}{\delta t} = \lim \frac{1}{S}\int v \cos(vn) ds. \qquad (16)$$

50. Gesetzt, es sei bei der Verschiebung der Punkte der Fläche S auf dieser Fläche selbst die Geschwindigkeit v jedes Punktes der Differentialparameter p einer gewissen Function φ dieses Punktes. Bezeichnen φ_1 und φ_2 die partiellen Derivirten $\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}$ und setzt man

$$\Theta = \tfrac{1}{2}(h_1^2\varphi_1^2 + h_2^2\varphi_2^2 + 2\overline{h_1 h_2}\varphi_1\varphi_2),$$

so ergeben sich nach § 72 und § 111 der Kinematik für die Componenten der Geschwindigkeit v längs den Coordinatenparametern die Ausdrücke:

$$a_1 q_1' = a_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1}, \quad a_2 q_2' = a_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2};$$

um also im vorliegenden Falle den Werth der *Ausdehnung im Punkte* M zu erhalten, hat man in Formel (14) zu setzen:

$$q_1' = \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1} = h_1^2\varphi_1 + \overline{h_1 h_2}\varphi_2,$$

$$q_2' = \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2} = \overline{h_1 h_2} \varphi_1 + h_2^2 \varphi_2;$$

dadurch erhält man:

$$\lim \frac{1}{S} \frac{\delta S}{\delta t} = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial \left(k \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1} \right)}{\partial q_1} + \frac{\partial \left(k \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2} \right)}{\partial q_2} \right].$$

Diese Grösse, die aus den partiellen Derivirten erster und zweiter Ordnung der Function φ nach den Coordinaten zusammengesetzt ist, nennt man *Differentialparameter zweiter Ordnung der Function* φ.

Mit Beibehaltung des von Lamé eingeführten Symbols $\Delta_2 \varphi$ zur Bezeichnung desselben hat man dann

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial \left(k \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1} \right)}{\partial q_1} + \frac{\partial \left(k \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2} \right)}{\partial q_2} \right], \tag{17}$$

wo

$$\Theta = \tfrac{1}{2}(h_1^2 \varphi_1^2 + h_2^2 \varphi_2^2 + 2\overline{h_1 h_2} \varphi_1 \varphi_2), \quad \varphi_r = \frac{\partial \varphi}{\partial q_r},$$

$$k = a_1 a_2 \sin (a_1 a_2) = \frac{1}{h_1 h_2 \sin (h_1 h_2)}.$$

Im Falle orthogonaler Coordinaten q_1 und q_2 hat man $\sin (a_1 a_2) = \sin (h_1 h_2) = 1$, $\overline{h_1 h_2} = 0$ zu setzen, so dass man erhält:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1} = h_1^2 \varphi_1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2} = h_2^2 \varphi_2,$$

$$\Delta_2 \varphi = h_1 h_2 \left[\frac{\partial \left(\frac{h_1 \varphi_1}{h_2} \right)}{\partial q_1} + \frac{\partial \left(\frac{h_2 \varphi_2}{h_1} \right)}{\partial q_2} \right]. \tag{18}$$

Somit erhält man, wenn die Fläche S eben ist, für geradlinige rechtwinklige Coordinaten:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \tag{19}$$

Für Polarcoordinaten, d. h. den Radiusvector r und den Winkel ω, den derselbe mit einer gegebenen Axe bildet, findet man:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right)}{\partial \omega} \right]$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}. \tag{20}$$

Im Allgemeinen ist $\Delta_2 \varphi$, wie man leicht aus Formel (17)

sieht, wenn man die Differentiationen ausführt, eine lineare Function der partiellen Derivirten erster und zweiter Ordnung von φ. Die Coefficienten dieser Function haben verschiedene Werthe für die verschiedenen Coordinatensysteme. Auch überzeugt man sich leicht davon, dass alle die verschiedenen Ausdrücke, die man aus Formel (17) für $\Delta_2\varphi$ erhalten kann, immer eine und dieselbe Grösse darstellen und sich durch gewöhnliche Coordinatentransformation aus einander ableiten lassen, indem man statt der früheren Coordinaten deren Ausdrücke in den neuen Coordinaten substituirt. Im Falle ebener Coordinaten nimmt man gewöhnlich den einfachsten Ausdruck (19) des Differentialparameters zweiter Ordnung als Definition desselben. Geht man von dieser Definition aus und substituirt in (19) für x und y deren Ausdrücke in irgend welchen anderen Coordinaten, so erhält man ein Resultat von der Form (17). Dass die verschiedenartigen Ausdrücke von $\Delta_2\varphi$, die den verschiedenen Coordinatensystemen entsprechen, eine und dieselbe Grösse darstellen, lässt sich folgendermassen direct beweisen.

Die Formeln (13) und (15) geben:

$$\int \Delta_2\varphi dS = \int p \cos(pn) ds.$$

Bezeichnet man nun mit $\Delta_2'\varphi$ den Ausdruck (17) für ein anderes Coordinatensystem und mit $d'S$ den diesen Coordinaten entsprechenden Ausdruck für das Element der Fläche S, so hat man

$$\int \Delta_2'\varphi d'S = \int p \cos(pn) ds;$$

folglich wird:

$$\frac{1}{S}\int \Delta_2'\varphi d'S = \frac{1}{S}\int \Delta_2\varphi dS.$$

Diese Gleichung muss für jede Grösse und Gestalt der Fläche S bestehen, folglich auch in der Grenze, d. h. wenn man ihre Dimensionen zu Null werden lässt; also ist:

$$\Delta_2'\varphi = \Delta_2\varphi.$$

51. Wir gehen nun über zur Ableitung des Ausdrucks für die Variation einer in einem Volumen V enthaltenen Masse m, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Dichtigkeit ϱ im Punkte M im Allgemeinen eine Function der Co-

ordinaten q_1, q_2, q_3 dieses Punktes und der Zeit t ist und dass das Volumen durch eine Fläche S begrenzt ist.

Die Masse m ist durch das Integral

$$m = \int \varrho \omega dq_1 dq_2 dq_3,$$

das sich über das Volumen V erstreckt, ausgedrückt; dabei ist (s. § 3)

$$\omega = a_1 a_2 a_3 \Delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 \Delta'^{\frac{1}{2}}}.$$

Bedeuten nun m' und V' die geänderte Masse und das geänderte Volumen, so kann man m' in zwei Theile zerlegen, nämlich in den, in dem ursprünglichen Volumen V enthaltenen Theil m_1 und in den Theil $m'' = m' - m_1$ in einem Volumen, dessen eine Dimension unendlich klein von derselben Ordnung wie δt ist; diesen letztern Theil kann man als eine über die Fläche S vertheilte Masse ansehen. Das Volumen der Masse m_1 kann man derart in Elemente dm_1 zerlegen, dass dm_1 und dm dasselbe Volumen $\omega dq_1 dq_2 dq_3$ haben, aber eine verschiedene Dichtigkeit, nämlich resp. $\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \delta t$ und ϱ. Vernachlässigt man in der Differenz $m_1 - m$ unendlich kleine Grössen höherer Ordnung, so erhält man die partielle Variation $\delta_1 m$, die durch das Integral

$$\delta_1 m = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} \delta t \omega dq_1 dq_2 dq_3,$$

das sich über das ursprüngliche Volumen V erstreckt, ausgedrückt ist. Um die totale Variation δm zu erhalten, hat man zu $\delta_1 m$ noch die Grösse m'' zu addiren, mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen von höherer Ordnung als δt.

Man kann m'' als die Masse der Fläche S ansehen, wobei diese Masse in einem beliebigen Punkte M von S die Dichtigkeit $\varrho' . MM' . \cos(MM', n)$ hat; hierin ist ϱ' der Werth von ϱ im Punkte M zur Zeit $t + \delta t$, $\overline{MM'}$ die Verschiebung des Punktes M und n die äussere Normale von S im Punkte M; folglich ist

$$m'' = \int \varrho' . MM' \cos(MM', n) dS,$$

wobei die Integration sich über die ganze Oberfläche S er-

streckt.*) Bezeichnet man mit δq_1, δq_2, δq_3 die Variationen der Coordinaten q_1, q_2, q_3, die der Differentialverschiebung MM' entsprechen, so ist

$$MM' \cos(MM', n)$$
$$= a_1 \delta q_1 \cos(a_1 n) + a_2 \delta q_2 \cos(a_2 n) + a_3 \delta q_3 \cos(a_3 n);$$

vernachlässigt man unter dem Integralzeichen unendlich kleine Grössen von höherer Ordnung als δt, so kann man die Dichtigkeit ϱ' durch die ursprüngliche Dichtigkeit ϱ ersetzen; daher geht die Grösse m'' in die folgende Summe über:

$$\int \varrho a_1 \delta q_1 \cos(a_1 n) dS + \int \varrho a_2 \delta q_2 \cos(a_2 n) dS$$
$$+ \int \varrho a_3 \delta q_3 \cos(a_3 n) dS.$$

Nach Formel (14) § 6 lässt sich jedes der Integrale in der letzten Formel in ein über das Volumen V ausgedehntes Integral verwandeln; es wird nämlich:

$$\begin{aligned} \int \varrho a_1 \delta q_1 \cos(a_1 n) dS &= \int \frac{\partial(\varrho \omega \delta q_1)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3, \\ \int \varrho a_2 \delta q_2 \cos(a_2 n) dS &= \int \frac{\partial(\varrho \omega \delta q_2)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3, \qquad (21) \\ \int \varrho a_3 \delta q_3 \cos(a_3 n) dS &= \int \frac{\partial(\varrho \omega \delta q_3)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

Die Summe dieser drei Integrale ist also derjenige Theil m'', der zu $\delta_1 m$ hinzuzufügen ist, um die totale Variation δm zu erhalten. Es ist mithin:

$$\delta m =$$
$$= \int \left[\omega \frac{\partial \varrho}{\partial t} \delta t + \frac{\partial(\varrho \omega \delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\varrho \omega \delta q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\varrho \omega \delta q_3)}{\partial q_3} \right] dq_1 dq_2 dq_3. \text{**)} \quad (22)$$

Da nun

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \varrho}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \varrho}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial \varrho}{\partial q_3} \delta q_3$$

die totale Variation $\delta \varrho$ ist, so kann man die Formel (22) auch in der Form schreiben:

---

*) Diejenigen Elemente der Masse m'', für die $\cos(MM', n) > 0$ ist, liegen ausserhalb des Volumens V und die, für welche $\cos(MM', n) < 0$, innerhalb.

**) Auch diese Formel lässt sich aus der allgemeinen Formel von Ostrogradsky für die Variation eines mehrfachen Integrals ableiten.

$$\delta m = \int \left\{ \omega \delta \varrho + \varrho \left[\frac{\partial (\omega \delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (\omega \delta q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (\omega \delta q_3)}{\partial q_3} \right] \right\} dq_1 dq_2 dq_3. \quad (23)$$

Hieraus lässt sich die Variation δV des Volumens V leicht ableiten. Man hat dazu nur $\varrho = 1$ zu setzen, und zwar für jeden Punkt und zu jeder Zeit t; dann ist $\delta \varrho = 0$ und mithin:

$$\delta V = \int \left[\frac{\partial (\omega \delta q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (\omega \delta q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (\omega \delta q_3)}{\partial q_3} \right] dq_1 dq_2 dq_3. \quad (24)$$

Dividirt man dies durch δt und setzt $\frac{\delta q_r}{\delta t} = q_r'$, so erhält man die Derivirte

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \int \left[\frac{\partial (\omega q_1')}{\partial q_1} + \frac{\partial (\omega q_2')}{\partial q_2} + \frac{\partial (\omega q_3')}{\partial q_3} \right] dq_1 dq_2 dq_3, \quad (25)$$

die man die Volumenausdehnung in der Zeiteinheit nennen kann. Dividirt man dieselbe durch V, so erhält man die mittlere Volumenausdehnung $\frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta t}$ der cubischen Einheit.

Lässt man alle drei Dimensionen des Volumens gegen Null convergiren, jedoch so, dass der Punkt M in dem Volumen enthalten bleibt, so erhält man in der Grenze den Werth

$$\lim \frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta t} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\partial (\omega q_1')}{\partial q_1} + \frac{\partial (\omega q_2')}{\partial q_2} + \frac{\partial (\omega q_3')}{\partial q_3} \right], \quad (26)$$

den man die *cubische Ausdehnung im Punkte M* oder die *cubische Ausdehnung des Volumenelements dV* nennt.

Das Integral (25) lässt sich mit Hilfe der Formeln (21) in ein Integral verwandeln, das sich über die Oberfläche S ausdehnt. Setzt man $\varrho = 1$, $MM' = v \delta t$, wo v die Geschwindigkeit der Verschiebung bedeutet, so findet man

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \int v \cos (vn) dS, \quad (27)$$

also:

$$\lim \frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta t} = \lim \frac{1}{V} \int v \cos (vn) dS. \quad (28)$$

52. Man denke sich eine Bewegung, bei der die Geschwindigkeit v jedes Punktes des Volumens zur Zeit t der Differentialparameter P einer gewissen Function φ dieses Punktes ist. Setzt man (s. Kinem. Cap. XII, S. 240) $\frac{\partial \varphi}{\partial q_r} = \varphi_r$ und

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{h_r h_s}\varphi_r\varphi_s,$$

so sind die Grössen

$$a_1\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1},\ a_2\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2},\ a_3\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3}$$

die Componenten des Parameters P nach den reciproken Coordinatenparametern a_1, a_2, a_3; infolge der Bedingung $v = P$ hat man nun zu setzen:

$$a_1 q_1' = a_1\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1},\ a_2 q_2' = a_2\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2},\ a_3 q_3' = a_3\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3},$$

d. h. es ist: $q_r' = \dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi_r}$.

Um also im vorliegenden Falle die cubische Ausdehnung im Punkte M zu erhalten, hat man in Formel (26) $\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1}$, $\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2}$, $\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3}$ an Stelle von q_1', q_2', q_3' zu substituiren; dadurch ergiebt sich:

$$\lim\frac{1}{V}\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial\left(\omega\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(\omega\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(\omega\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3}\right)}{\partial q_3}\right].$$

Diese Grösse, die aus den partiellen Derivirten erster und zweiter Ordnung der Function φ nach den Coordinaten zusammengesetzt ist, heisst der *Differentialparameter zweiter Ordnung der räumlichen Punktfunction* φ. Benutzt man das von Lamé für denselben eingeführte Symbol $\Delta_2\varphi$, so hat man:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial\left(\omega\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_1}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(\omega\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_2}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(\omega\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_3}\right)}{\partial q_3}\right]. \quad (29)$$

Im Falle orthogonaler Coordinaten hat man $\Delta' = 1$, $\overline{h_r h_s} = 0$ zu setzen (bei ungleichen Indices r und s); es wird also:

$$\omega = \frac{1}{h_1 h_2 h_3},\ \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi_r} = h_r^2\varphi_r,$$

$$\Delta_2\varphi = h_1 h_2 h_3\left[\frac{\partial\left(\frac{h_1\varphi_1}{h_2 h_3}\right)}{\partial q_1} + \frac{\partial\left(\frac{h_2\varphi_2}{h_1 h_3}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(\frac{h_3\varphi_3}{h_1 h_2}\right)}{\partial q_3}\right]. \quad (30)$$

Hieraus folgt ferner:

1) Für geradlinige rechtwinklige Coordinaten ist

$$\Delta_2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \quad (31)$$

2) Für Polarcoordinaten, d. h. den Radiusvector r, den Winkel ϑ, den derselbe mit einer gegebenen Axe bildet, und den Flächenwinkel ψ, den die Ebene des Winkels ϑ mit einer gegebenen Ebene bildet, ergiebt sich:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left[\frac{\partial\left(r^2 \sin\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\sin\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)}{\partial\psi}\right]. \quad (32)$$

3) Für das orthogonale Coordinatensystem der x, y, z von William Thomson (Kinem. S. 131 u. ff.) ist:

$$h_1 = h_2 = h_3 = \frac{c^2}{r^2},$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{c^4}{r^6}\left[\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}{\partial z}\right]. \quad (33)$$

Entwickelt man den Ausdruck (29), so erhält man immer eine in Bezug auf die partiellen Derivirten erster und zweiter Ordnung von φ lineare Function, die für jedes Coordinatensystem eine besondere Form annimmt. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass der Werth von $\Delta_2\varphi$ für alle Coordinatensysteme derselbe und nur die Form verschieden ist. Aus den Formeln (25) und (27) findet man nämlich

$$\int \Delta_2 \varphi \, dV = \int P \cos(Pn)\, dS; \quad (34)$$

vertauscht man das Coordinatensystem mit einem anderen, so erhält man einen anderen Ausdruck für den Differentialparameter zweiter Ordnung, den wir mit $\Delta_2'\varphi$, sowie einen anderen Ausdruck für das Volumenelement, den wir mit $d'V$ bezeichnen wollen. Nach Formel (34) ist nun

$$\int \Delta_2' \varphi \, d'V = \int P \cos(Pn)\, dS$$

und daher:

$$\frac{1}{V}\int \Delta_2 \varphi \, dV = \frac{1}{V}\int \Delta_2' \varphi \, d'V;$$

in der Grenze aber wird, wenn man die Dimensionen von V sich der Null nähern lässt, $\Delta_2\varphi = \Delta_2'\varphi$.

53. Gewöhnlich nimmt man als Definition von $\Delta_2\varphi$ den speciellen Ausdruck (31), d. h. man definirt den Differentialparameter zweiter Ordnung als *die Summe der partiellen, nach den einzelnen rechtwinklig-geradlinigen Coordinaten genommenen Derivirten zweiter Ordnung.*

Laplace zeigt in der Mécanique céleste, wie sich der Ausdruck (31) durch Transformation der rechtwinkligen Polarcoordinaten in den Ausdruck (32) überführen lässt. Lamé hat durch Transformation rechtwinklig-geradliniger Coordinaten in orthogonale krummlinige irgend welcher Art den Ausdruck (31) auf die Form (30) zurückgeführt.*) Cauchy hat die Form gefunden, die der Ausdruck (31) annimmt, wenn die Variablen x, y, z durch irgend welche andere p, q, r ersetzt werden; diese Form stimmt mit der Formel (29) überein.**) Jacobi gelangte zu demselben Resultat durch Variation eines dreifachen Integrals.***) Brioschi endlich hat allgemein gezeigt, wie man in dem Ausdrucke

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}$$

die Variablen x_1, x_2, x_3, ... x_n, welches auch ihre Anzahl n sein mag, durch irgend welche andere Variable ersetzen kann.†)

Da die Grösse $\Delta_2 \varphi$ nicht von dem Coordinatensystem abhängt, so ist es naturgemäss, ihr eine von dem Coordinatensystem unabhängige Definition zu geben. Ebendeshalb habe ich für dieselbe die obige kinematische Definition gewählt, als einer *Flächen-* oder *Volumenausdehnung*, die durch die Verschiebungen der Punkte mit Geschwindigkeiten, gleich den Differentialparametern erster Ordnung der Function φ in diesen Punkten, hervorgerufen wird.

Den allgemeinen Ausdruck (29) für $\Delta_2 \varphi$ habe ich schon in der Abhandlung „Moyen d'exprimer directement en coordonnées curvilignes quelconques, orthogonales ou obliques, les paramètres différentiels du premier et du second ordres et la courbure d'une surface“ aufgestellt und abgeleitet.††)

---

*) Leçons sur les coordonnées curvilignes.

**) „Recherches sur les intégrales des équations aux dérivées partielles“ in den Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. T. II.

***) „Ueber eine particulare Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$“ in Crelle's Journ. Bd. 36, oder in Jacobi's Mathematischen Werken, Bd. II.

†) Brioschi: Théorie des déterminants.

††) Mémoires de l'Acad. des sciences de St.-Pétersb., VII. série, T. VIII, No. 16.

54. Wendet man den Ausdruck (17) auf jede Coordinate an, d. h. setzt man $\varphi = q_1, q_2$, so erhält man die Coordinatendifferentialparameter zweiter Ordnung:

$$\Delta_2 q_1 = \frac{1}{k}\left[\frac{\partial(k\overline{h_1^2})}{\partial q_1} + \frac{\partial(k\overline{h_1 h_2})}{\partial q_2}\right],$$
$$\Delta_2 q_2 = \frac{1}{k}\left[\frac{\partial(k\overline{h_1 h_2})}{\partial q_1} + \frac{\partial(k\overline{h_2^2})}{\partial q_2}\right]. \tag{35}$$

Substituirt man in der Formel (17) für $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1}$ und $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2}$ ihre Ausdrücke:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_1} = \overline{h_1^2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \overline{h_1 h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_2} = \overline{h_1 h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \overline{h_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2},$$

so ergiebt sich mit Berücksichtigung der Formeln (35):

$$\Delta_2 \varphi = \Delta_2 q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \Delta_2 q_2 \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}$$
$$+ \overline{h_1^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} + 2\overline{h_1 h_2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_2} + \overline{h_2^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2}. \tag{36}$$

Für eine Punktfunction im Raume ergeben sich aus Formel (29), indem man $\varphi = q_1, q_2, q_3$ setzt, die Coordinatenparameter zweiter Ordnung allgemein in der Form:

$$\Delta_2 q_r = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial(\omega\overline{h_1 h_r})}{\partial q_1} + \frac{\partial(\omega\overline{h_2 h_r})}{\partial q_2} + \frac{\partial(\omega\overline{h_3 h_r})}{\partial q_3}\right].$$

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich die Formel (29) leicht auf die Form bringen:

$$\Delta_2 \varphi = \Sigma \Delta_2 q_r \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} + \Sigma \overline{h_r h_s}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_r \partial q_s}. \tag{37}$$

55. Die lineare Gestalt der Formeln (36) und (37) in Bezug auf die partiellen Derivirten der Function φ zeigt, dass *der Differentialparameter zweiter Ordnung von der Summe mehrerer Functionen gleich der Summe der Differentialparameter zweiter Ordnung der einzelnen Functionen ist*, d. h. es ist:

$$\Delta_2(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \cdots) = \Delta_2 \varphi + \Delta_2 \varphi' + \Delta_2 \varphi'' + \cdots.$$

Dies lässt sich auch folgendermassen beweisen. Es seien φ, φ', φ'', ... Functionen eines Punktes der Fläche S, deren Begrenzung s sei, und $\overline{p}$, $\overline{p'}$, $\overline{p''}$, ... deren Differentialparameter erster Ordnung. Bedeutet nun F die Summe $\varphi + \varphi' + \varphi'' + \cdots$ und $\overline{P}$ deren Parameter erster Ordnung, so ist

$$\overline{P} = \overline{p} + \overline{p'} + \overline{p''} + \cdots$$

und folglich

$$\int P \cos (Pn) ds = \int p \cos (pn) ds + \int p' \cos (p'n) ds + \\ + \int p'' \cos (p''n) ds + \cdots,$$

wo n die Richtung der äusseren Normale bedeutet. Dividirt man dies durch S und lässt die Dimensionen dieser Fläche sich der Null nähern, so erhält man auf Grund der Formel (16):

$$\Delta_2 F = \Delta_2 \varphi + \Delta_2 \varphi' + \Delta_2 \varphi'' + \cdots.$$

Auf dieselbe Weise lässt sich die Behauptung für Punktfunctionen im Raume mit Hilfe der Formel (28) beweisen.

56. Nach Lamé's Ansicht ergiebt sich die naturgemässeste Definition des Differentialparameters zweiter Ordnung aus der Gleichung für die Fortpflanzung der Wärme in einem homogenen unkrystallisirten festen Körper. Ist φ eine Function eines Punktes und der Zeit t und repräsentirt dieselbe die Temperatur des Körpers in dem betreffenden Punkte, so hat man

$$k \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta_2 \varphi, \tag{38}$$

wenn k eine Grösse bedeutet, die von der specifischen Wärme, von dem Wärmeleitungscoefficienten und von der Dichtigkeit des Körpers abhängig ist. Sind diese drei Grössen von der Art, dass $k = 1$ ist, so hat man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta_2 \varphi,$$

d. h. *der Differentialparameter zweiter Ordnung von einer die Temperatur darstellenden Function ist gleich der Derivirten dieser Function nach der Zeit.* Diese Derivirte kann man als die Geschwindigkeit der Erwärmung des Körpers in dem gegebenen Punkte ansehen. In Rücksicht auf diese Eigenschaft des Differentialparameters zweiter Ordnung hat Lamé für denselben den Namen *Zuwachs* (augment) vorgeschlagen.

Es sei V das Volumen eines homogenen unkrystallisirten Körpers, ϱ seine Dichtigkeit und φ die Temperatur zur Zeit t in einem beliebigen Punkte M oder die Temperatur eines beliebigen Elements ϱdV seiner Masse. Aendert sich φ mit t, so rührt diese Aenderung der Temperatur von einer Zu- oder

Abnahme der Wärme in der Masse ϱdV her; das Increment von φ während der unendlich kleinen Zeit δt lässt sich, mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung, durch $\frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta t$ ausdrücken; das entsprechende Increment der in der Masse ϱdV enthaltenen Wärmemenge hat dann den Ausdruck

$$c\varrho dV\frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta t, \tag{a}$$

wo c die specifische Wärme ist, d. h. diejenige Wärmemenge, welche die Temperatur der Masseneinheit in der Zeiteinheit um einen Grad zu erhöhen vermag. Diese Grösse (a) lässt sich auch noch auf andere Art ausdrücken, indem man von der bekannten Formel ausgeht, welche diejenige Wärmemenge ausdrückt, die in einem Zeitelemente von einem Theile der Masse durch eine trennende Fläche in den anderen Theil übergeht.

Denken wir uns nämlich in dem Körper eine zwischen zwei Flächen S und S' enthaltene, unendlich dünne Schicht (SS'). Es sei dS ein Element der Fläche S von zwei unendlich kleinen Dimensionen, MM' der zwischen S und S' enthaltene Theil der Normalen von dS, φ die Temperatur im Punkte M und φ' die Temperatur im Punkte M'. Nach einem bekannten Gesetz ist die Wärmemenge, welche in der Zeit δt durch den über dS stehenden Theil der Schicht (SS') hindurchdringt, gleich

$$q\frac{\varphi'-\varphi}{MM'}dS\delta t,$$

worin man den Factor q den Wärmeleitungscoefficienten nennt. Diese Wärmemenge ist positiv oder negativ, d. h. die Wärme geht von S' auf S über oder umgekehrt, je nachdem $\varphi' > \varphi$ oder $\varphi' < \varphi$ ist. Mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung ergiebt sich, wenn man $MM' = dn$ und $\varphi' - \varphi = d\varphi$ setzt, für die in der Zeit δt durch die Fläche S hindurchdringende Wärmemenge

$$q\frac{d\varphi}{dn}dS\delta t = qP\cos(Pn)dS\delta t,$$

wo P der Differentialparameter erster Ordnung der Tempe-

ratur φ und n die nach der Seite von S' hin gerichtete Normale von dS ist. Das Vorzeichen dieser Grösse hängt von dem Vorzeichen von $\cos(Pn)$ ab. Gesetzt es sei S die ganze, einen beliebigen Massentheil begrenzende Oberfläche und q über diese ganze Fläche hin constant. Dann ist die Wärmemenge, welche durch die Fläche S hindurch in die innerhalb derselben befindliche Masse eindringt, durch das über die ganze Oberfläche S auszudehnende Integral

$$q\delta t\int P\cos(Pn)dS \tag{b}$$

ausgedrückt. Mit Hilfe der Formel (27) sieht man leicht ein, dass $\delta t\int P\cos(Pn)dS$ die cubische Ausdehnung des von der Fläche S begrenzten Volumens ist, welche von der Verschiebung der Punkte der Fläche S zur Zeit t mit Geschwindigkeiten gleich den entsprechenden Werthen des Differentialparameters P erster Ordnung herrührt. Bezieht man also die Formel (b) auf das Massenelement $\varrho\, dV$, so ist $\delta t\int P\cos(Pn)dS = \delta dV$, folglich $\frac{1}{dV}\int P\cos(Pn)dS = \frac{1}{dV}\cdot\frac{\delta dV}{\delta t} = \Delta_2\varphi$, und der Ausdruck ($b$) wird $q\delta t\Delta_2\varphi dV$. Setzt man diese Grösse gleich (a) und setzt $\frac{c\varrho}{q} = k$, so erhält man die Gleichung (38).

Diese Gleichung gilt auch für die Temperatur φ der Punkte einer materiellen Fläche S. Dazu hat man vorauszusetzen, dass sich die Wärme auf der Fläche S selbst derart ausbreitet, dass diejenige Wärmemenge, die während der Zeit δt durch das Element ds einer beliebigen Linie s von einer Seite auf die andere übertritt, durch die Formel $qp\cos(pn)ds\delta t$ ausgedrückt ist; dabei ist p der Differentialparameter der Function φ bezüglich der Fläche S, n die Normale auf ds und q der Wärmeleitungscoefficient der Linie s. Ausserdem hat man in dem Ausdruck $k = \frac{c\varrho}{q}$ das ϱ als Dichtigkeit der Fläche S anzusehen und c als diejenige Wärmemenge, welche im Stande ist, die Temperatur der Flächeneinheit in der Zeiteinheit um einen Grad zu erhöhen.

Wenn die Temperatur φ in einem gegebenen Punkte bei Aenderung der Zeit t constant bleibt (was in dem Falle eintritt, wenn die Wärme sich im Gleichgewicht befindet, d. h.

wenn jedes Massenelement seine Wärmemenge beibehält, so ist $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$; es ist daher nach Gleichung (38) φ eine Punktfunction, die der Bedingung

$$\Delta_2 \varphi = 0$$

genügt. *Jede Punktfunction, die die Eigenschaft hat, dass ihr Differentialparameter zweiter Ordnung für jeden Punkt der gegebenen Fläche oder des gegebenen Volumens gleich Null ist,* nennt Lamé eine *thermometrische Function.*

Wenn φ die Temperatur ist, so nennt man die Niveaulinien oder Niveauflächen (φ), d. h. die Linien oder Flächen, für deren Punkte φ einen und denselben Werth hat, *isothermische Linien oder Flächen.*

Wir wollen nun die Haupteigenschaften der thermometrischen Functionen und der ihnen entsprechenden isothermischen Linien und Flächen betrachten.

57. Gesetzt, es sei φ eine thermometrische Function des Punktes M in der Ebene und x, y die rechtwinkligen geradlinigen Coordinaten dieses Punktes. In diesem Falle geht die Bedingung $\Delta_2 \varphi = 0$ nach Formel (19) über in die folgende:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{39}$$

Das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form

$$\varphi = F(x + iy) + f(x - iy), \tag{40}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist und F und f zwei willkürliche Functionen bezeichnen. Man kann sich folgendermassen leicht hiervon überzeugen. Die Gleichung (39), die sich in der Form

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

schreiben lässt, zeigt, dass der Ausdruck

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy$$

das vollständige Differential einer gewissen Function der beiden Variablen x und y ist. Bezeichnet man diese Function mit z, so hat man:

$$dz = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy;$$

zugleich ist aber auch

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy;$$

hieraus folgt:

$$d(\varphi + iz) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) d(x + iy),$$

$$d(\varphi - iz) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) d(x - iy).$$

Dies erfordert, dass $\varphi + iz$ eine Function der complexen Grösse $x + iy$ und $\varphi - iz$ eine Function der conjugirten Grösse $x - iy$ ist, was sich folgendermassen ausdrücken lässt:

$$\varphi + iz = 2F(x + iy),\ \ \varphi - iz = 2f(x - iy);$$

dabei kann man für F und f zwei beliebige Functionen wählen. Die halbe Summe dieser Ausdrücke giebt die Formel (40).

Man überzeugt sich leicht, dass die Functionen

$$1)\ ax + by,\quad 2)\ xy,\quad 3)\ x^2 - y^2,\quad 4)\ \log(x^2 + y^2),$$
$$5)\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

der Bedingung (39) genügen und auf die Form (40) gebracht werden können; sie sind daher *thermometrische Functionen* in der Ebene. Die ihnen entsprechenden *isothermischen Linien* sind: 1) die Gerade $(ax + by)$, 2) die gleichseitige Hyperbel (xy), die auf ihre Asymptoten als Axen bezogen ist, 3) die gleichseitige auf die Axen bezogene Hyperbel $(x^2 - y^2)$, 4) der Kreis $(x^2 + y^2)$ und 5) die durch den Coordinatenursprung gehende Gerade $\left(\frac{y}{x}\right)$.

Setzt man in Formel (40) $f(x - iy) = 0$, so wird

$$\varphi = F(x + iy);$$

man sieht hieraus, dass man jede Function einer complexen Grösse als eine thermometrische Function ansehen kann.

Lässt sich eine Function einer complexen Grösse auf die Form

$$\varphi = u + iv$$

bringen, wo u und v reelle Functionen in Bezug auf x und y sind, so ist jede dieser Functionen für sich eine thermo-

metrische Function. Denn aus der Bedingung, dass φ eine Function der complexen Grösse $x + iy$ ist, folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Die die Function φ bildenden reellen Grössen u und v kann man als kartographische Coordinaten in der Ebene auffassen (s. Kinematik § 77).

58. Jede Function $F(\varphi)$ einer thermometrischen Function φ nennt man einen *thermometrischen Parameter*. Eine solche Function genügt im Allgemeinen nicht der Bedingung $\Delta_2 F(\varphi) = 0$. Da aber der Werth von $F(\varphi)$ constant bleibt, wenn der Werth von φ constant ist, und umgekehrt, so haben beide Functionen dieselben Niveaulinien, resp. Niveauflächen, d. h. die Niveaulinie resp. Niveaufläche von $F(\varphi)$ ist eine isothermische.

Gesetzt, ein Punkt auf der Fläche S sei durch die Coordinaten q_1 und q_2 bestimmt, und φ sei eine thermometrische Function dieses Punktes; wir wollen untersuchen, welcher Bedingung die Coordinate q_i genügen muss, um ein thermometrischer Parameter zu sein. Nach der Definition des thermometrischen Parameters ist erforderlich, dass q_i eine Function von φ allein sei, und daher muss umgekehrt die thermometrische Function φ die Form $\varphi(q_i)$ haben, d. h. sie muss eine Function von nur einer Coordinate sein. In diesem Falle hat man nach Formel (36)

$$\Delta_2 q_i \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} + h_i^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i^2} = 0, \tag{41}$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{h_i^2} \Delta_2 q_i = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i^2} : \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist von nur einer Coordinate q_i abhängig; daher hat auch die linke Seite diese Eigenschaft; *damit also die Function q_i eines Punktes auf einer Fläche ein thermometrischer Parameter sei, mit anderen Worten, damit die*

Niveaulinie (q_i) eine isothermische Linie sei, ist nothwendig, dass das Verhältniss ihres Differentialparameters zweiter Ordnung zu dem Quadrat des Differentialparameters erster Ordnung von keiner anderen Variablen ausser der Function q_i selbst abhängig sei.

Es giebt unendlich viele thermometrische Parameter q_i, die einer und derselben thermometrischen Function φ entsprechen. Kennt man einen derselben, so kann man die Function φ finden. Gesetzt, man habe z. B. gefunden:

$$\frac{\varDelta_2 q_i}{h_i^2} = f(q_i);$$

dann hat man nach Gleichung (41)

$$f(q_i)\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i^2} = 0,$$

woraus sich durch Integration ergiebt

$$\varphi = A\int e^{-\int f(q_i)\,d q_i} d q_i + B, \tag{42}$$

wo A und B willkürliche Constante sind.

Im Falle orthogonaler Coordinaten q_1 und q_2 hat man nach den Formeln (35)

$$\varDelta_2 q_1 = h_1 h_2 \frac{\partial\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}{\partial q_1}, \quad \varDelta_2 q_2 = h_1 h_2 \frac{\partial\left(\frac{h_2}{h_1}\right)}{\partial q_2},$$

woraus folgt:

$$\frac{\varDelta_2 q_1}{h_1^2} = \frac{\partial \log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}{\partial q_1}, \quad \frac{\varDelta_2 q_2}{h_2^2} = \frac{\partial \log\left(\frac{h_2}{h_1}\right)}{\partial q_2} \tag{43}$$

und

$$\frac{\partial\left(\frac{\varDelta_2 q_1}{h_1^2}\right)}{\partial q_2} + \frac{\partial\left(\frac{\varDelta_2 q_2}{h_2^2}\right)}{\partial q_1} = 0. \tag{44}$$

Ist q_1 ein thermometrischer Parameter, so ist

$$\frac{\partial\left(\frac{\varDelta_2 q_1}{h_1^2}\right)}{\partial q_2} = 0,$$

also nach Gleichung (44) auch:

$$\frac{\partial\left(\frac{\varDelta_2 q_2}{h_2^2}\right)}{\partial q_1} = 0,$$

d. h. $\frac{\Delta_2 q_2}{h_2^2}$ ist von der Coordinate q_1 unabhängig; folglich ist q_2 ebensowohl wie q_1 ein thermometrischer Parameter, entspricht aber einer anderen thermometrischen Function.

Erfüllen die beiden Coordinaten die Bedingungen $\Delta_2 q_1 = 0$, $\Delta_2 q_2 = 0$, so nennt man das Coordinatensystem (q_1, q_2) ein thermometrisches. Zu diesen gehört unter anderen das System der rechtwinkligen geradlinigen Coordinaten x und y, denn es ist $\Delta_2 x = 0$, $\Delta_2 y = 0$. In dem Polarcoordinatensystem, das durch den Radiusvector r und den Winkel ω gebildet wird, ist die erstere dieser Coordinaten, r, ein thermometrischer Parameter; die zweite, ω, aber ist eine thermometrische Function; denn setzt man $q_1 = r$, $q_2 = \omega$, so ergeben die Formeln (44):

$$\frac{\Delta_2 q_1}{h_1^2} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\Delta_2 q_2}{h_2^2} = 0.$$

Die Coordinatenlinien (r) und (ω) sind beide isothermische Linien.

Setzt man in Formel (42) $f(q_i) = \frac{1}{r}$, so erhält man die dem Parameter r entsprechende thermometrische Function, nämlich:

$$\varphi = A\int\frac{dr}{r} + B = A \log r + B. \tag{45}$$

Die elliptischen Coordinaten in der Ebene, λ und μ (Kinematik § 55), sind zwei thermometrische Parameter; denn setzt man $q_1 = \lambda$ und $q_2 = \mu$, so ergiebt sich:

$$\frac{\Delta_2 q_1}{h_1^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2}, \quad \frac{\Delta_2 q_2}{h_2^2} = -\frac{\mu}{c^2 - \mu^2};$$

daher sind die confocalen Ellipsen (λ) und Hyperbeln (μ) *isothermische orthogonale* Curven. Nach Formel (42) findet man die den Parametern λ und μ entsprechenden thermometrischen Functionen:

$$\varphi_1 = A_1\int\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} + B_1 = A_1 \log\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c} + B_1,$$

$$\varphi_2 = A_2\int\frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} + B_2 = A_2 \arcsin\left(\frac{\mu}{c}\right) + B_2,$$

wo A_1, B_1, A_2, B_2 willkürliche Constante sind. Wählt man

für diese Constanten die einfachsten Werthe $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_2 = 0$, so hat man:

$$\varphi_1 = \log\left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c}\right), \quad \varphi_2 = \arc\sin\left(\frac{\mu}{c}\right).$$

Man hat daher, um von den elliptischen Coordinaten λ, μ auf die thermometrischen φ_1 und φ_2 überzugehen, die Formeln:

$$\lambda = \frac{c}{2}\left(e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1}\right), \quad \mu = c \sin \varphi_2.$$

Die Differentialparameter der thermometrischen Functionen φ_1 und φ_2 haben denselben Werth, nämlich:

$$\frac{c}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} = \frac{2}{\left(e^{2\varphi_1} + e^{-2\varphi_1} + 2\cos 2\varphi_2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Man sieht hieraus, dass das Coordinatensystem der φ_1, φ_2 zu den kartographischen gehört (s. Kin. § 77).

59. Ist φ eine thermometrische Function eines Punktes (q_1, q_2, q_3) im Raume und ist die Coordinate q_i der entsprechende thermometrische Parameter, so reducirt sich die Bedingung $\Delta_2\varphi = 0$ nach Formel (37) auf die Gleichung

$$\Delta_2 q_i \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} + h_i^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i^2} = 0, \tag{46}$$

die von der nämlichen Form ist, wie (41). Man ersieht aus derselben, dass die Grösse

$$\frac{\Delta_2 q_i}{h_i^2} = -\frac{\partial_2 \varphi}{\partial q_i^2} : \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$$

nur von einer Coordinate q_i abhängig ist; *damit also die Function q_i eines Punktes im Raume ein thermometrischer Parameter, oder damit die Niveaufläche (q_i) eine isothermische Fläche sei, ist nothwendig, dass das Verhältniss des Differentialparameters zweiter Ordnung zum Quadrate des Differentialparameters erster Ordnung von keiner anderen Variablen abhängig sei, als von der Function (q_i) selbst.*

Ist diese Bedingung erfüllt und hat man also:

$$\frac{\Delta_2 q_i}{h_i^2} = f(q_i),$$

so findet man die thermometrische Function φ, die dem thermometrischen Parameter entspricht, nach der Formel

$$\varphi = A\int e^{-\int f(q_i)\,dq_i}\,dq_i + B\,, \tag{47}$$

worin A und B willkürliche Constante sind.

Im Falle orthogonaler Coordinaten q_1, q_2, q_3 findet man nach Formel (30):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_2 q_1}{h_1^2} &= \frac{\partial \log\left(\frac{h_1}{h_2 h_3}\right)}{\partial q_1}, \\ \frac{\Delta_2 q_2}{h_2^2} &= \frac{\partial \log\left(\frac{h_2}{h_1 h_3}\right)}{\partial q_2}, \\ \frac{\Delta_3 q_3}{h_3^2} &= \frac{\partial \log\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\right)}{\partial q_3}. \end{aligned} \tag{48}$$

Für jedes geradlinige Coordinatensystem (x, y, z) ist $\Delta_2 x = 0$, $\Delta_2 y = 0$, $\Delta_2 z = 0$; ein solches System ist daher ein thermometrisches. Für das Polarcoordinatensystem (den Radiusvector r, den Winkel ϑ, den derselbe mit einer gegebenen Axe bildet und den Winkel ψ, den die Ebene des Winkels ϑ mit einer gegebenen Ebene bildet) ergeben die Formeln (48), wenn man $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = \psi$ setzt:

$$\frac{\Delta_2 q_1}{h_1^2} = \frac{2}{r}, \quad \frac{\Delta_2 q_2}{h_2^2} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \quad \frac{\Delta_2 q_3}{h_3^2} = 0.$$

Man sieht, dass die Coordinate ψ eine thermometrische Function ist, die Coordinaten r und ϑ aber thermometrische Parameter sind. Die Kugel (r), der Kegel (ϑ) und die Ebene (ψ) sind isothermische Flächen.

Bezeichnet man mit φ_1 und φ_2 die den thermometrischen Parametern r und ϑ entsprechenden thermometrischen Functionen, so findet man nach Formel (47):

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{r} + B_1\,, \quad \varphi_2 = A_2 \log\left(\tan\frac{\vartheta}{2}\right) + B_2\,,$$

wo A_1, B_1, A_2, B_2 willkürliche Constante sind.

Betrachten wir noch das System der elliptischen Raumcoordinaten λ_1, λ_2, λ_3 (s. Kinem. § 56 u. ff.).

Setzt man $q_1 = \lambda_1$, $q_2 = \lambda_2$, $q_3 = \lambda_3$, so folgt aus den Formeln (12) S. 130 der Kinematik:

$$\frac{\Delta_2 \lambda_i}{h_i^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_1 + \lambda_i} + \frac{1}{a_2 + \lambda_i} + \frac{1}{a_3 + \lambda_i}\right].$$

Man sieht hieraus, dass jede der drei Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3 ein thermometrischer Parameter ist. Bezeichnet man mit φ_1, φ_2, φ_3 die entsprechenden thermometrischen Functionen, so findet man nach Formel (47):

$$\varphi_1 = A_1 \int \frac{d\lambda_1}{\sqrt{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)(a_3 + \lambda_1)}} + B_1 ,$$

$$\varphi_2 = A_2 \int \frac{d\lambda_2}{\sqrt{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)(-a_3 - \lambda_2)}} + B_2 ,$$

$$\varphi_3 = A_3 \int \frac{d\lambda_3}{\sqrt{(a_1 + \lambda_3)(-a_2 - \lambda_3)(-a_3 - \lambda_3)}} + B_3 ,$$

wo A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 willkürliche Constante sind. Die hier vorkommenden Integrale lassen sich durch elliptische Integrale der ersten Gattung ausdrücken. Uebrigens sind alle jene drei Ausdrücke in dem einen enthalten:

$$\varphi = A \int \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda)}} + B.$$

Die speciellen Werthe dieser thermometrischen Function

$$\varphi_1(\lambda_1) = A_1 \int_{-a_3}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda)}},$$

$$\varphi_2(\lambda) = A_2 \int_{-a_2}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(-a_3 - \lambda)}},$$

$$\varphi_3(\lambda_3) = A_3 \int_{-a_1}^{\lambda_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1 + \lambda)(-a_2 - \lambda)(-a_3 - \lambda)}},$$

wo die Grenzen der Integrale der Bedingung

$$\lambda_1 > -a_3 > \lambda_2 > -a_2 > \lambda_3 > -a_1$$

unterworfen und A_1, A_2, A_3 reelle Grössen sind, repräsentiren ein bemerkenswerthes thermometrisches Coordinatensystem, das dem System der elliptischen Coordinaten λ_1, λ_2, λ_3 conjugirt ist und dieselben confocalen Flächen zweiter Ordnung (λ_1), (λ_2), (λ_3) wie jenes zu Coordinatenflächen hat. Hieraus folgt, dass jede centrische Fläche zweiter Ordnung eine gewisse isothermische Fläche darstellt.*)

*) Genaueres über dieses Coordinatensystem findet sich in Lamé's „Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes". Paris, 1857.

60. Wir haben in § 58 gesehen, dass der in einer gegebenen Ebene von einem beliebigen Pole O nach einem Punkte M gezogene Radiusvector r ein thermometrischer Paramèter und dass die logarithmische Function

$$A \log r + B,$$

wo A und B Constante bedeuten, die entsprechende thermometrische Function ist. Ferner folgt aus § 55, dass, wenn $r, r', r'', \ldots$ die aus den Polen $O, O', O'', \ldots$ nach einem und demselben Punkte M gezogenen Radienvectoren sind, die Summe der thermometrischen Functionen

$$A \log r + B, \;\; A' \log r' + B', \;\; A'' \log r'' + B'', \ldots,$$

wo $A, B, A', B', A'', B'', \ldots$ Constante sind, ebenfalls eine thermometrische Function ist. Jene Summe kann man in der folgenden Form darstellen

$$\log (r^A r'^{A'} r''^{A''} \ldots) + C, \tag{49}$$

wo C eine Constante ist.

Ferner haben wir in § 58 gesehen, dass die Winkel $\omega, \omega', \omega'', \ldots$, welche die Radienvectoren $r, r', r'', \ldots$ mit gegebenen Richtungen einschliessen, thermometrische Functionen sind; daher ist nach § 55 auch die Summe

$$A\omega + A'\omega' + A''\omega'' + \cdots + C,$$

wo $A, A', A'', \ldots C$ Constante sind, eine thermometrische Function.

Die beiden Functionen

$$\alpha = A \log r + A' \log r' + A'' \log r'' + \cdots,$$
$$\beta = A\omega + A'\omega' + A''\omega'' + \cdots$$

repräsentiren, wenn $A, A', A'', \ldots$ in beiden dieselben Werthe haben und die Winkel $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ von einer und derselben Axe aus im selben Sinne gerechnet werden, ein thermometrisches Coordinatensystem, das, wie man leicht sieht, ein orthogonales ist. Zum Beweise der Orthogonalität wollen wir nach Cap. VII der Kinematik die Differentialparameter erster Ordnung P und P' für die Functionen α und β bestimmen.

Der Parameter P ist die geometrische Summe der partiellen Parameter

$$\frac{A}{r}, \; \frac{A'}{r'}, \; \frac{A''}{r''}, \ldots, \tag{50}$$

deren Richtungen mit den entsprechenden Radienvectoren $r, r', r'', \ldots$ zusammenfallen. Der Parameter P' ist die geometrische Summe derselben Grössen (50); diese sind aber jetzt senkrecht zu den betreffenden Radienvectoren $r, r', r'', \ldots$ aufgetragen zu denken, und zwar infolge der Annahme über die Winkel $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ derart, dass, wenn man das System der partiellen Parameter von $\overline{P}$ in dem Sinne der Winkel $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ um 90^0 dreht, man das System der partiellen Parameter von P' erhält; daher muss $\overline{P'}$ auf $\overline{P}$ senkrecht stehen und überdiess $P' = P$ sein. Mithin bilden die α und β wirklich ein orthogonales thermometrisches Coordinatensystem, das zu den kartographischen gehört (vgl. Kinem. § 77).

Die Linien (α) und (β) sind orthogonale isothermische Curven. In dem speciellen Falle

$$\alpha = A \log r + A \log r' = A \log (r r'),$$
$$\beta = \omega + \omega'$$

ist die Linie (α) eine algebraische Curve, die sogenannte *Cassinoide*, während (β) eine *gleichseitige Hyperbel* darstellt, deren Brennpunkte die Pole O und O' sind.

Für den Fall

$$\alpha = A \log r - A \log r' = A \log \frac{r}{r'},$$
$$\beta = \omega - \omega'$$

werden die Linien (α) und (β) zu zwei Kreisen.*)

61. Die Function $A \log r$ und ihr Differentialparameter $\frac{A}{r}$ werden im Pole O unendlich gross, daher braucht $\Delta_2 \log r$ nicht gleich Null zu sein, wenn der Punkt M mit dem Pole O zusammenfällt.

Um den Werth von $\Delta_2 \log r$ für $r = 0$ zu finden, muss man untersuchen, welche Form der allgemeine Ausdruck des Differentialparameters zweiter Ordnung, wie er sich oben aus der von uns aufgestellten Definition ergab, in diesem Falle annimmt. Gesetzt, die Punkte der Begrenzung eines beliebigen

---

*) Eine ausführliche Untersuchung dieser isothermischen Linien findet man in dem Werke von Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, 12me et 13me leçons.

Flächenraumes S verschieben sich in der Fläche mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{r}$ in der Richtung des Radiusvectors r. Dann ist die quadratische Ausdehnung des Flächenraumes S in der Zeiteinheit durch das Integral

$$\int \frac{1}{r} \cos (rn) ds$$

ausgedrückt, das sich über die Begrenzung s der Fläche S erstreckt, wobei n die Richtung der äusseren Normale der Begrenzung bedeutet. Das Verhältniss

$$\frac{1}{S} \int \frac{1}{r} \cos (rn) ds$$

ist die Ausdehnung der Flächeneinheit, und die Grenze, der sich diese Grösse nähert, wenn beide Dimensionen des Flächenraumes S sich der Null nähern, ist der Werth des Differentialparameters zweiter Ordnung $\Delta_2 \log r$ in dem Punkte, mit dem alle Punkte des Flächenraumes S zusammenfallen.

Bezeichnet nun φ den Winkel, welchen der Radiusvector r mit einer gegebenen Axe einschliesst, so ist, wie wir in § 5 gesehen haben,

$$\frac{1}{r} \cos (rn) ds = \pm d\varphi,$$

wo das Zeichen $+$ für den Fall gilt, dass der Radiusvector in die Fläche S eintritt, das Zeichen $-$ für den Austritt. Befindet sich also der Pol O ausserhalb des Flächenraumes S, so reducirt sich die Integration nach r auf die Summirung der Reihe:

$$-d\varphi + d\varphi - d\varphi + d\varphi - \cdots,$$

die aus einer geraden Anzahl von Gliedern besteht; dann ist also:

$$\int \frac{1}{r} \cos (rn) ds = 0.$$

Daraus folgt aber, dass $\Delta_2 \log r = 0$ ist für jeden mit dem Pole nicht zusammenfallenden Punkt M.

Liegt dagegen der Pol O in dem Flächenraume S, so führt die Integration nach r auf die Summe

$$+ d\varphi - d\varphi + d\varphi - \cdots,$$

die eine ungerade Anzahl von Gliedern hat; daher wird

$$\int \frac{1}{r} \cos(rn) ds = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi;$$

folglich ist:

$$\frac{1}{S}\int \frac{1}{r} \cos(rn) ds = \frac{2\pi}{S}.$$

Für $S = 0$ ist diese Grösse ∞; daher nimmt $\Delta_2 \log r$ für $r = 0$ einen unendlich grossen Werth an. Man kann also sagen, dass $\Delta_2 \log r$ im Punkte O zwei Werthe, 0 und ∞, hat.

Verschieben sich die Punkte der Begrenzung eines beliebigen Flächenraumes S mit einer Geschwindigkeit $\bar{p}$ gleich dem Differentialparameter der Function

$$A \log r + A' \log r' + \cdots,$$

so reducirt sich die quadratische Ausdehnung auf die Summe:

$$\int p \cos(pn) ds = A\int \frac{1}{r} \cos(rn) ds + A'\int \frac{1}{r'} \cos(r'n) ds + \cdots$$

Die Glieder dieser Summe, die den ausserhalb der Fläche S gelegenen Punkten entsprechen, sind gleich Null; daher ist:

$$\int p \cos(pn) ds = 2\pi(A + A' + \cdots); \tag{51}$$

in diesem Ausdruck kommen nur diejenigen von den Constanten A, A', A'', ... vor, die den in dem Flächenraume S liegenden Polen O, O', O'', ... entsprechen. Dividirt man die Summe (51) durch S und lässt die Dimensionen von S derart in Null übergehen, dass einer der Pole auf S verbleibt, so erhält man:

$$\Delta_2 (A \log r + A' \log r' + A'' \log r'' + \cdots) = \infty.$$

Es steht nun nichts entgegen anzunehmen, dass die Anzahl der Pole O, O', O'', ... unendlich gross sei und dass sie eine continuirliche Raumgrösse, d. h. eine Linie oder eine Fläche bilden, während A, A', A'', ... als die Elemente der Masse m jener Raumgrösse angesehen werden können. Dann stellt die Summe $(A + A' + \cdots)$ in Formel (51) den innerhalb des Flächenraumes S enthaltenen Theil der Masse m dar. Bezeichnet man diesen Theil der Masse m mit μ, so hat man:

$$\frac{1}{S}\int p \cos(pn) ds = 2\pi \frac{\mu}{S}.$$

Ist m eine lineare Masse und ist ihre Dichtigkeit nicht unendlich klein, so hat das Verhältniss $\frac{\mu}{S}$ einen unendlich grossen Werth, wenn die Fläche S zwei unendlich kleine Dimensionen hat.

Ist m die Masse eines gewissen Flächenraumes u und S ein Element dieser Fläche, so ist die Grenze, der sich das Verhältniss $\frac{\mu}{S}$ nähert, wenn die beiden Dimensionen von S sich der Null nähern, die Dichtigkeit ϱ eines der Punkte der Masse m.

Wählt man dagegen die Fläche S so, dass sie nicht ganz, sondern dass nur ein gewisser Theil σ derselben der Fläche u angehört, so kann man die Gestalt von S so ändern und die Dimensionen derart sich der Null nähern lassen, dass der Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\mu}{S} = \frac{\mu}{\sigma}\frac{\sigma}{S}$ das Product der einem gewissen Punkte der Begrenzung der Fläche u zukommenden Dichtigkeit ϱ in den Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\sigma}{S}$ ist, welcher letztere kleiner als Eins ist und sowohl von der Gestalt der Fläche S als auch von der Art, wie ihre Dimensionen abnehmen, abhängt. Offenbar kann man eine solche Fläche S wählen und ihre Dimensionen derart abnehmen lassen, dass der Grenzwerth $\frac{\sigma}{S}$ gleich jeder beliebigen Zahl wird, die kleiner als 1 ist.

Aus dem Obigen schliesst man, dass das über die Fläche u ausgedehnte Integral

$$\int \log r dm = \int \varrho \log r du, \tag{52}$$

wenn ϱ für jeden Punkt der Fläche u einen endlichen Werth hat, eine thermometrische Function des Punktes M ist, wenn dieser Punkt ausserhalb der Fläche u liegt. Liegt derselbe aber innerhalb, so hat es nicht mehr diese Eigenschaft, weil sein Differentialparameter zweiter Ordnung dann nicht mehr Null ist; die Grösse des letzteren ist dann

$$\Delta_2 \int \log r dm = 2\pi\varrho,$$

wenn ϱ die Dichtigkeit der Masse m im Punkte M bezeichnet.

Liegt endlich der Punkt M auf der Begrenzung der Fläche u und hat er die Dichtigkeit ϱ, so ist:

$$\Delta_2 \int \log r\, dm = 2\pi\varrho\varepsilon,$$

wo ε eine willkürliche Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet.

62. Bei Betrachtung der räumlichen Polarcoordinaten eines Punktes M in § 59 hatte sich gezeigt, dass der von einem gegebenen Pole nach jenem Punkte M gezogene Radiusvector r ein thermometrischer Parameter ist und dass die Function $\frac{A}{r} + B$ bei constanten Werthen von A und B die entsprechende thermometrische Function ist.

Nach § 55 ist daher die Summe

$$\frac{A}{r} + \frac{A'}{r'} + \frac{A''}{r''} + \cdots + C,$$

worin A, A', A'', ... C Constante und r, r', r'', ... die aus den Polen O, O', O'', ... nach dem Punkte M gezogenen Radienvectoren sind, ebenfalls eine thermometrische Function. Der Differentialparameter erster Ordnung $\overline{P}$ dieser Function ist die geometrische Summe der partiellen Parameter

$$\frac{A}{r^2}, \frac{A'}{r'^2}, \frac{A''}{r''^2}, \ldots,$$

die auf den entsprechenden Radienvectoren r, r', r'', ... in entgegengesetztem Sinne aufzutragen sind.

Bei dem Beweise (§ 59), dass $\Delta_2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ ist, war vorausgesetzt, dass r nicht gleich Null oder dass der Punkt M nicht der Pol selbst ist. Betrachten wir nun den Werth von $\Delta_2\left(\frac{1}{r}\right)$ für $r = 0$, indem wir von der allgemeinsten Definition des Differentialparameters als der cubischen Ausdehnung ausgehen.

Bedeutet V ein beliebiges Volumen und nimmt man an, dass jeder Punkt seiner Oberfläche S mit einer dem Parameter erster Ordnung der Function $\frac{1}{r}$ geometrisch gleichen Geschwindigkeit in dem dem r entgegengesetzten Sinne verschoben wird, so erhält man für die cubische Ausdehnung des Volumens V in der Zeiteinheit den Ausdruck

$$\frac{dV}{dt} = -\int \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, dS,$$

worin n die Richtung der äusseren Normale der Oberfläche S bezeichnet.

Der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ist, wie in § 5 gezeigt wurde, das Element $d\sigma$ eines Kugelflächenstückes σ vom Radius 1 und Centrum O, welches durch einen Kegel, dessen Spitze in O und dessen Grundfläche dS ist, ausgeschnitten wird. Setzt man also

$$\frac{1}{r^2} \cos(rn)\, dS = \pm\, d\sigma,$$

so gilt das Zeichen — für den Fall eines Eintritts, das Zeichen + für den Fall eines Austritts des Radiusvectors aus der Kugelfläche. Liegt also der Pol O ausserhalb des Volumens V, so liefert die Integration nach r die Summe

$$d\sigma - d\sigma + d\sigma - d\sigma + \cdots,$$

die aus einer geraden Anzahl gleicher Glieder mit abwechselndem Vorzeichen besteht. Daher wird hier $\frac{dV}{dt} = 0$, folglich ist

$$\Delta_2 \frac{1}{r} = \lim \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0,$$

wenn der Punkt M mit dem Pole O zusammen fällt, d. h. in diesem Falle ist $\frac{1}{r}$ eine thermometrische Function. Liegt aber der Pol innerhalb des Volumens V, so führt die Integration nach r auf die Summe

$$-d\sigma + d\sigma - d\sigma + \cdots,$$

die eine ungerade Anzahl entgegengesetzt gleicher Glieder enthält. Es ist daher

$$\frac{dV}{dt} = -\int d\sigma = -4\pi;$$

mithin wird die Grenze, der sich die Ausdehnung der Volumeneinheit in der Zeiteinheit nähert, nämlich der Ausdruck

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -\frac{4\pi}{V},$$

wenn sich alle drei Dimensionen von V der Null nähern, der Pol O aber innerhalb des Volumens bleibt, unendlich gross.

Man hat also für $r = 0$ für den Differentialparameter zweiter Ordnung $\Delta_2\left(\frac{1}{r}\right)$ zwei Werthe: 0 und ∞.

Gesetzt nun, jeder Punkt der Oberfläche S des Volumens V verschiebe sich mit einer Geschwindigkeit, die dem Differentialparameter erster Ordnung $\overline{P}$ der Function

$$\frac{A}{r} + \frac{A'}{r'} + \frac{A''}{r''} + \cdots$$

gleich ist. Dadurch erhält das Volumen eine cubische Ausdehnung

$$\int P \cos(Pn)\, dS = -4\pi (A + A' + A'' + \cdots), \tag{53}$$

die nur diejenigen von den Constanten $A, A', A'', \ldots$, welche den innerhalb des Volumens V gelegenen Polen $O, O', O'', \ldots$ entsprechen, enthält. Dividirt man den Ausdruck (53) durch V und lässt alle drei Dimensionen dieses Volumens sich der Null nähern, wobei jedoch einer der Pole innerhalb des Volumens bleiben soll, so erhält man in der Grenze:

$$\Delta_2\left(\frac{A}{r} + \frac{A'}{r'} + \frac{A''}{r''} + \cdots\right) = \infty.$$

Nehmen wir nun an, die Anzahl der Pole $O, O', O'', \ldots$ sei unendlich gross, so dass dieselben eine continuirliche Raumgrösse (eine Linie, eine Fläche oder ein Volumen) bilden, deren Masse m die Dichtigkeit ϱ habe, und untersuchen wir die Function des Punktes M, die durch das Integral

$$\int \frac{dm}{r}, \tag{54}$$

das sich über die Masse m erstreckt, ausgedrückt ist; dabei bedeute r den Abstand des Punktes M von dem Elemente dm.

Liegt der Punkt M ausserhalb der Masse m, so ist diese Function offenbar eine thermometrische, da ja jedes Element $\frac{dm}{r}$ diese Eigenschaft hat. Für einen in der Masse m enthaltenen Punkt dagegen verliert sie diese Eigenschaft. Um dies zu beweisen, wollen wir den Werth des Differentialparameters zweiter Ordnung bestimmen.

Denken wir uns ein beliebiges Volumen V und nehmen wir an, dass jeder Punkt seiner Oberfläche verschoben wird

mit einer Geschwindigkeit gleich dem Differentialparameter P der Function (54). Mit Hilfe der Formel (53) ergiebt sich für die cubische Ausdehnung des Volumens V der Ausdruck

$$\frac{dV}{dt} = -4\pi\mu,$$

wo μ der im Volumen V enthaltene Theil der Masse m ist; daher hat man für die mittlere cubische Ausdehnung der Volumeneinheit in der Zeiteinheit den Ausdruck:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -4\pi\frac{\mu}{V}.$$

Ist m die Masse einer Linie oder einer Fläche von der endlichen Dichtigkeit ϱ in jedem Punkte, so wird diese Grösse unendlich gross, wenn alle drei Dimensionen von V unendlich klein sind; daher ist dann:

$$\varDelta_2\int\frac{dm}{r} = \infty.$$

Wenn aber die Masse m eine Raumgrösse von drei Dimensionen erfüllt und die Dichtigkeit ϱ in jedem Punkte endlich ist, so erhält man, wenn man für V das Volumen der Masse μ wählt und alle drei Dimensionen desselben sich der Null nähern lässt, in der Grenze:

$$\varDelta_2\int\frac{dm}{r} = -4\pi\varrho, \tag{55}$$

wo $\varrho = \lim\frac{\mu}{V}$ die Dichtigkeit in demjenigen Punkte M ist, in den alle Punkte des Volumens V zusammenfallen.

Gesetzt, der Punkt M liege auf der Oberfläche der Masse m und wählen wir für V ein beliebiges Volumen, das diesen Punkt enthält; es sei μ der in diesem Volumen enthaltene Theil der Masse m und V' ihr Volumen. Man hat dann:

$$\varDelta_2\int\frac{dm}{r} = -4\pi\cdot\lim\left(\frac{\mu}{V'}\right)\cdot\lim\left(\frac{V'}{V}\right).$$

Hierin ist $\lim\left(\frac{\mu}{V'}\right)$ die Dichtigkeit ϱ im Punkte M, während $\lim\left(\frac{V'}{V}\right)$ jede beliebige Zahl ε zwischen 0 und 1 bedeuten kann. Man hat also allgemein:

$$\varDelta_2\int\frac{dm}{r} = -4\pi\varrho\varepsilon, \tag{56}$$

wo man für einen äusseren Punkt M immer $\varepsilon = 0$, für einen

inneren $\varepsilon = 1$ zu setzen hat, während für einen auf der Oberfläche der Masse m gelegenen Punkt $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ ist.

Die beiden in den letzten §§ betrachteten Functionen (52) und (54) finden in der Mechanik und in der mathematischen Physik sehr wichtige Anwendung. Wir werden im zweiten Capitel der Statik auf dieselben zurückkommen, wo wir Methoden zu ihrer Berechnung für gewisse Massen geben und ihre Eigenschaften genauer untersuchen werden.

Lamé nennt den thermometrischen Parameter, betrachtet als Function der entsprechenden thermometrischen Function, die *inverse Function.* In Form solcher inversen Functionen lassen sich unter anderen die Exponential- und die elliptischen Functionen darstellen, wie wir in § 57 u. ff. gesehen haben. Eingehende Untersuchungen über die inversen Functionen, von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet, findet man in dem Werke von Lamé: „Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes."*)

Wir werden nun noch andere bemerkenswerthe Folgerungen betrachten, die sich aus den Ausdrücken für die Variationen der Masse einer Fläche und der Masse eines Volumens ergeben.

63. Denken wir uns über die Fläche S eine Masse m vertheilt, deren Dichtigkeit nur eine Function der Punkte der Fläche ist, d. h.: von der Zeit nicht explicit abhängt; die Punkte dieser Fläche sollen sich auf der Fläche selbst verschieben mit einer Geschwindigkeit, die dem Differentialparameter erster Ordnung p einer gegebenen Function φ geometrisch gleich ist. Die dadurch herbeigeführte Variation der Masse m ist durch das Integral

$$\delta m = \delta t \int \varrho p \cos(pn) ds$$

ausgedrückt, welches über die Begrenzung s auszudehnen ist und in dem n die Richtung der in der Tangentenebene von S liegenden äusseren Normale dieser Begrenzung bedeutet. Andererseits hat man nach den Formeln (9) und (10) § 47:

*) Auch die Abhandlung von Hâton de la Goupillière „Mémoire sur une nouvelle théorie générale des lignes isothermes et du potentiel cylindrique," die sich in dem Journ. de l'Éc. Polyt. 38me cahier p. 15 findet, enthält interessante Untersuchungen über die thermometrischen Functionen, die isothermischen Linien und die isothermischen Flächen.

$$\delta m = \int (\delta\varrho + \varrho \Delta_2 \varphi \delta t) dS,$$

worin sich die Integration über die Fläche S erstreckt.*)

Setzt man diesen Ausdruck gleich dem vorhergehenden und dividirt durch δt, so ergiebt sich:

$$\int \frac{\delta\varrho}{\delta t} dS + \int \varrho \Delta_2 \varphi dS = \int \varrho p \cos(pn)\, ds. \qquad (57)$$

Bezeichnet man mit p' den Differentialparameter erster Ordnung der Function ϱ, die, wie vorausgesetzt, t nicht explicit enthält, so hat man

$$\frac{\delta\varrho}{\delta t} = p' \cos(p'p) p = \overline{pp'}$$

(s. Kinematik § 112, S. 243); hiermit geht Formel (57) über in:

$$\int \overline{pp'}\, dS + \int \varrho \Delta_2 \varphi dS = \int \varrho p \cos(pn)\, ds. \qquad (58)$$

Dabei sind ϱ und φ willkürliche Functionen, die nur der Bedingung unterworfen sind, dass sie selbst, sowie ihre Differentialparameter p und p' für jeden Punkt des Flächenraums S je einen bestimmten endlichen Werth haben; $\Delta_2 \varphi$ ist eine endliche Grösse, die in gewissen Punkten discontinuirlich sein kann. Wenn überdiess auch $\Delta_2 \varphi$ der letzteren Bedingung genügt, so lassen sich die Functionen ϱ und φ vertauschen; man erhält dadurch:

$$\int \overline{pp'}\, dS + \int \varphi \Delta_2 \varrho dS = \int \varphi p' \cos(p'n)\, ds.$$

Subtrahirt man diese Formel von (58), so ergiebt sich die Gleichung

$$\int \varrho \Delta_2 \varphi dS - \int \varphi \Delta_2 \varrho dS = \int \varrho p \cos(pn) ds - \int \varphi p' \cos(p'n) ds, \quad (59)$$

die eine bemerkenswerthe gegenseitige Beziehung der Functionen ϱ und φ zu einander ausdrückt.

---

*) Diese Formel lässt sich folgendermassen leicht direct ableiten. Man kann die Masse m als Summe der Elemente ϱdS ansehen und die Variation δm als Summe der Variationen jedes einzelnen Elements. Die Variation eines einzelnen Elements kann man aber in der Form darstellen

$$\delta(\varrho dS) = \left(\delta\varrho + \varrho \frac{\delta dS}{dS}\right) dS = (\delta\varrho + \varrho \Delta_2 \varphi \delta t) dS;$$

folglich ist:

$$\delta m = \int (\delta\varrho + \varrho \Delta_2 \varphi \delta t)\, dS.$$

64. Setzen wir nun die Fläche S als eben voraus und bezeichnen wir mit r den Radiusvector, der von einem beliebig in dem Flächenraum S gewählten Pole nach irgend einem Punkte dieses Flächenraums oder dessen Begrenzung s führt; endlich sei

$$\varrho = \log(r).$$

Für $r = 0$ wird $\varrho = -\infty$, also darf die Integration auf der linken Seite der Gleichung (59) nicht über die ganze Fläche S ausgedehnt werden; dagegen wird nichts entgegenstehen, diese Integration über denjenigen Theil der Fläche S auszudehnen, der von der Begrenzung s und von der Peripherie eines Kreises begrenzt wird, welcher aus O als Centrum mit einem so kleinen Radius ε beschrieben ist, dass er ganz in die Fläche S hineinfällt. Man muss dann auf der rechten Seite der Gleichung (59) die Integration über die Begrenzung s und die Peripherie des Kreises vom Radius ε ausdehnen. Dabei ist zu beachten, dass für alle Elemente dS auch $\Delta_2 \log(r) = 0$ ist und dass der Parameter $\bar{p}'$ gleich $\frac{1}{r}$ und längs r gerichtet ist; dadurch geht die Formel (59) über in die folgende

$$\int \log(r)\, \Delta_2 \varphi\, dS = \int \log(r)\, p \cos(pn)\, ds - \int \varphi \frac{1}{r} \cos(rn)\, ds$$
$$+ \int_\varepsilon \log(r)\, p \cos(pn)\, ds - \int_\varepsilon \varphi \frac{1}{r} \cos(rn)\, ds, \qquad (60)$$

worin $\int_\varepsilon$ eine Integration über die Peripherie des Kreises vom Radius ε bedeutet. Unter diesem Integralzeichen hat man $r = \varepsilon$ und $\cos(rn) = -1$ zu setzen; bezeichnet nun ω den Winkel, den der Radiusvector r mit einer beliebigen festen Axe bildet, so ist $ds = \varepsilon d\omega$; also wird

$$\int_\varepsilon \log(r)\, p \cos(pn)\, ds = -\varepsilon \log(\varepsilon) \int p \cos(p\varepsilon)\, d\omega, \qquad (61)$$

$$-\int_\varepsilon \varphi \frac{1}{r} \cos(rn)\, ds = \varphi_\varepsilon \int d\omega = 2\pi \varphi_\varepsilon,$$

wobei φ_ε der Mittelwerth ist aus allen Werthen, die die Function φ auf der Peripherie des Kreises vom Radius ε hat. Wird ε unendlich klein und geht in Null über, so erhält φ_ε

den Werth, den φ im Punkte O hat. Die Grösse $\varepsilon \log \varepsilon$ ist bekanntlich gleich Null für $\varepsilon = 0$, während $\int p \cos(p\varepsilon)\, d\omega$ einen endlichen Werth behält; daher wird (61) zugleich mit ε zu Null; folglich geht die Formel (60) für $\varepsilon = 0$ in die folgende über:

$$\int \log(r) \Delta_2 \varphi dS = \int \log(r) p \cos(pn) ds - \int \varphi \frac{1}{r} \cos(rn) ds + 2\pi\varphi, \quad (62)$$

wo die Integration auf der linken Seite über die ganze Fläche S auszudehnen ist. Dies ist hier zulässig, weil der auf die Kreisfläche vom Radius ε bezügliche Theil des Integrals unendlich klein ist. Wegen $dS = r dr d\omega$ hat man nämlich

$$\int \log(r)\, \Delta_2 \varphi dS = \int \log(r)\, \Delta_2 \varphi \cdot r dr d\omega;$$

integrirt man nun über die Fläche des Kreises (ε) und bezeichnet mit $M[\log(r) \cdot r \Delta_2 \varphi]$ den Mittelwerth aus allen Werthen der Function $\log(r) \cdot r \Delta_2 \varphi$ auf einem beliebigen Radius r zwischen 0 und ε, so hat man:

$$\int \log(r)\, \Delta_2 \varphi \cdot r dr d\omega = \varepsilon \int_0^{2\pi} M[\log(r) \cdot r \Delta_2 \varphi]\, d\omega. \quad (63)$$

Da die Grösse $\log(r) \cdot r$ für $r = \varepsilon$ einen unendlich kleinen Werth hat und $\Delta_2 \varphi$ im Allgemeinen endlich ist, so ist der Werth $M[\log(r) \cdot r \Delta_2 \varphi]$ unendlich klein; ausserdem ist in (63) das Integral $\int_0^{2\pi}$ mit der unendlich kleinen Grösse ε multiplicirt; folglich ist der ganze Ausdruck (63) unendlich klein. In (62) kann man ferner $p \cos(pn) = \frac{d\varphi}{dn}$ setzen, wenn man mit dn die Verschiebung eines beliebigen Punktes der Begrenzung längs der äusseren Normale bezeichnet.

Die Formel (62) liefert einen bemerkenswerthen Ausdruck für den Werth, den die Function φ in einem beliebigen Punkte O der Fläche S hat, nämlich:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \left[\int \log(r)\, \Delta_2 \varphi dS + \int \varphi \frac{1}{r} \cos(rn) ds - \int \log(r) \frac{d\varphi}{dn} ds \right]. \quad (64)$$

Diese Formel sagt aus, dass *eine einwerthige endliche Function φ der Punkte einer gegebenen Fläche S sich bestimmen lässt, wenn bekannt ist: 1) der Werth ihres Differentialparameters zweiter Ordnung $\Delta_2 \varphi$ in jedem Punkt der Fläche S, 2) der Werth der*

Function selbst in jedem Punkt der Begrenzung s und 3) der Werth der Projection $\frac{d\varphi}{dn}$ *des Differentialparameters erster Ordnung auf die äussere Normale für die Punkte der Begrenzung, d. h. der Werth der Derivirten von* φ *bezüglich einer zu der Begrenzung normalen Verschiebung.* Ist der Werth von φ für jeden Punkt der Begrenzung gegeben, so kennt man die Werthe der Derivirten $\frac{d\varphi}{ds}$ bezüglich einer Verschiebung längs der Begrenzung; diese Grössen bestimmen in Verbindung mit dem gegebenen Werth von $\frac{d\varphi}{dn}$ die Grösse und Richtung des Parameters erster Ordnung $\bar{p}$ in jedem Punkte der Begrenzung. Ist umgekehrt die Grösse und die Richtung des Parameters $\bar{p}$ in jedem Punkte der Begrenzung s gegeben, so kann man seine beiden Componenten $\frac{d\varphi}{dn}$ und $\frac{d\varphi}{ds}$ bestimmen; indem man die letztere nach s integrirt, findet man φ für jeden Punkt der Begrenzung.

Wenn für alle Punkte der Fläche S die Relation $\Delta_2\varphi = 0$ besteht, so ist die Function φ eine thermometrische; in diesem Falle giebt die Formel (64):

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\left[\int \varphi\,\frac{1}{r}\cos(rn)\,ds - \int \log(r)\,\frac{d\varphi}{dn}\,ds\right]. \qquad (65)$$

Daher lässt sich der Werth einer thermometrischen Function in jedem Punkt einer gegebenen Fläche bestimmen, wenn für jeden Punkt der Begrenzung dieser Fläche gegeben ist: 1) der Werth der Function selbst und 2) der Werth ihrer Derivirten bezüglich einer zu der Begrenzung normalen Verschiebung.

In der allgemeinen Formel (64) stellt derjenige Theil, der aus Integralen, die sich über die Begrenzung s erstrecken, besteht, immer eine gewisse thermometrische Function dar. Die Formel (64) liefert nämlich

$$\Delta_2\varphi = \Delta_2\int \log(r)\frac{\Delta_2\varphi}{2\pi}\,dS + \Delta_2\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\int \varphi\,\frac{1}{r}\cos(rn)ds - \int \log(r)\,\frac{d\varphi}{dn}\,ds\right]\right\},$$

und wenn man in der in § 61 S. 137 gefundenen Formel

$$\Delta_2\int \log(r)\cdot\varrho\,dS = 2\pi\varrho$$

$\varrho = \frac{\Delta_2\varphi}{2\pi}$ setzt, so hat man

$$\Delta_2\int \log(r)\,\frac{\Delta_2\varphi}{2\pi}\,dS = \Delta_2\varphi\,;$$

daher ist:

$$\Delta_2 \left\{ \int \frac{1}{2\pi} \left[\varphi \frac{1}{r} \cos(rn)\, ds - \int \log(r) \frac{d\varphi}{dn}\, ds \right] \right\} = 0 .$$

Man sieht hieraus, dass sich jede thermometrische Function φ als Summe der beiden folgenden Functionen darstellen lässt:

$$\varphi' = \int \log(r) \frac{\Delta_2 \varphi}{2\pi}\, dS,$$

$$\varphi'' = \frac{1}{2\pi} \left[\int \varphi \frac{1}{r} \cos(rn)\, ds - \int \log(r) \frac{d\varphi}{dn}\, ds \right]. \qquad (66)$$

Dieselben haben folgende Eigenschaften: die erstere, φ', ist keine thermometrische Function für die Punkte der Fläche S und gehört zu der Functionsgattung (52), d. h. sie stellt sich dar als das Integral des Products von $\log(r)$ in das Element einer über die Fläche S vertheilten Masse m, deren Dichtigkeit $\varrho = \frac{\Delta_2 \varphi}{2\pi}$ ist; die zweite Function, φ'', ist eine thermometrische und ist nur durch die Werthe der Function φ selbst, sowie ihrer Derivirten nach einer normalen Verschiebung für die Punkte der Begrenzung bestimmt.

Nach Formel (64) ist

$$\varphi'' = \frac{1}{2\pi} \left[\int \varphi'' \frac{1}{r} \cos(rn)\, ds - \int \log(r) \frac{d\varphi''}{dn}\, ds \right];$$

subtrahirt man dies von dem Ausdruck (66), so findet man:

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int \varphi' \frac{1}{r} \cos(rn)\, ds - \int \log(r) \frac{d\varphi'}{dn}\, ds \right] = 0;$$

man hat also bei Anwendung der Formel (64) auf die Function φ' den auf die Begrenzung bezüglichen Theil gleich Null zu setzen.

65. Nehmen wir nun an, es sei m die Masse eines von der Fläche S begrenzten Volumens V; die Dichtigkeit ϱ der Masse m sei eine Function des betreffenden Punktes allein, d. h. nicht explicit abhängig von der Zeit t. Denken wir uns, wie in § 52, eine Verschiebung, bei der die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Differentialparameter erster Ordnung $\overline{P}$ einer gewissen Function φ ist. Man hat dann $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$, und die Variation δm der Masse ist daher durch das über die Oberfläche S auszudehnende Integral

$$\delta m = \delta t \int \varrho P \cos(Pn)\, dS \tag{67}$$

dargestellt; dabei ist n die Richtung der äusseren Normale von dS.

Andererseits ergiebt sich aus den Formeln (23) und (24) S. 117.

$$\delta m = \int (\delta \varrho + \varrho \Delta_2 \varphi \delta t)\, dV,\text{*)}$$

wobei die Integration sich auf das Volumen V erstreckt. Bezeichnet man mit $\overline{P}'$ den Differentialparameter erster Ordnung der Function ϱ, so ist (vergl. Kinematik, Cap. XII)

$$\delta \varrho = P' \cos(P'P)\, P \delta t;$$

daher wird:

$$\delta m = \delta t \int \overline{PP'}\, dV + \delta t \int \varrho \Delta_2 \varphi dV.$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich (67) und dividirt durch δt, so ergiebt sich:

$$\int \overline{PP'}\, dV + \int \varrho \Delta_2 \varphi dV = \int \varrho P \cos(Pn)\, dS. \tag{68}$$

Hierin sind ϱ und φ willkürliche Functionen, die nur der Bedingung genügen müssen, dass sowohl sie selbst als auch ihre Differentialparameter $\overline{P}$ und $\overline{P}'$ in jedem Punkte des Volumens continuirliche endliche einwerthige Grössen bleiben sollen; dabei hat $\Delta_2 \varphi$ nur einen endlichen Werth in jedem Punkte und bleibt in der ganzen Ausdehnung des Volumens V endlich, kann aber discontinuirlich sein. Genügt überdies auch $\Delta_2 \varrho$ dieser letzteren Bedingung, so kann man in Formel (68) ϱ mit φ und φ mit ϱ vertauschen; man erhält dadurch:

$$\int PP'\, dV + \int \varphi \Delta_2 \varrho dV = \int \varphi P' \cos(P'n)\, dS.$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von (68) erhält man die Formel

$$\int \varrho \Delta_2 \varphi dV - \int \varphi \Delta_2 \varrho dV = \int \varrho P \cos(Pn) dS - \int \varphi P' \cos(P'n) dS, \tag{69}$$

---

*) Diese Formel kann man auf folgende Weise direct erhalten. Die Variation δm ist die Summe der Variationen jedes Elements der Masse m; die Variation eines solchen einzelnen Elements $\varrho d V$ ist aber:

$$\delta(\varrho dV) = \left(\delta \varrho + \varrho \frac{\delta dV}{dV}\right) dV = (\delta \varrho + \varrho \Delta_2 \varphi \delta t)\, dV;$$

folglich ist:

$$\delta m = \int (\delta \varrho + \varrho \Delta_2 \varphi \delta t)\, dV.$$

welche eine gewisse wechselseitige Beziehung der Functionen φ und ϱ zu einander ausdrückt.

Die Formeln (68) und (69) entsprechen den Formeln (58) und (59) in § 63, die sich auf Functionen eines Flächenpunktes bezogen, und führen zu ähnlichen Folgerungen.

66. Bezeichnen wir nun mit r einen Radiusvector, der von einem innerhalb des Volumens V gewählten Pole O nach einem beliebigen anderen Punkte dieses Volumens führt, und setzen wir:

$$\varrho = \frac{1}{r}.$$

Da dann $\varrho = \infty$ wird für $r = 0$, so sind wir nicht berechtigt, die Integration auf der linken Seite der Gleichung (69) über das ganze Volumen V auszudehnen. Doch ist es zulässig, die Integration über denjenigen Theil des Volumens V auszudehnen, der zwischen der Fläche S und einer Kugeloberfläche liegt, deren Centrum O und deren Radius ε so klein ist, dass die Kugel ganz innerhalb V liegt.

Unter dieser Voraussetzung hat man auf der rechten Seite der Gleichung (69) die Integration über die Fläche S und die Oberfläche der erwähnten Kugel auszudehnen. Ueberdies hat man $\Delta_2 \varrho = \Delta_2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$ und für $\overline{P}'$ die Grösse $\frac{1}{r^2}$ zu setzen; diese Grösse ist auf r in entgegengesetztem Sinne aufzutragen. Dadurch erhält man aus Formel (69):

$$\int \frac{1}{r} \Delta_2 \varphi \, dV = \int \frac{1}{r} P \cos(Pn) \, dS + \int \varphi \frac{1}{r^2} \cos(rn) \, dS$$
$$+ \int_s \frac{1}{r} P \cos(Pn) \, dS + \int_s \varphi \frac{1}{r^2} \cos(rn) \, dS;$$

hierin bedeutet $\int_s$ eine über die Kugelfläche vom Radius ε auszudehnende Integration; man hat daher unter diesem Integralzeichen $r = \varepsilon$ und $\cos(rn) = -1$ zu setzen. Bezeichnet man mit σ die Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 und vom Centrum O und mit $d\sigma$ ihr Element, das von einem Kegel, dessen Spitze O und dessen Basis dS ist, ausgeschnitten wird, so hat man $\frac{1}{r^2} \cos(rn) \, dS = -d\sigma$; folglich ist

$$\int_\varepsilon \frac{1}{r} P \cos(Pn) dS = -\varepsilon \int P \cos(P\varepsilon) d\sigma, \qquad (70)$$

$$\int_\varepsilon \varphi \frac{1}{r^2} \cos(rn) dS = -\varphi_\varepsilon \int d\sigma = -4\pi\varphi_\varepsilon,$$

wo φ_ε der Mittelwerth unter allen Werthen ist, die die Function φ auf der Oberfläche der Kugel vom Radius ε hat. Ist nun ε unendlich klein und nähert sich der Null, so erlangt φ_ε den Werth, den φ im Punkte O hat; dabei behält $\int P \cos(P\varepsilon) d\sigma$ einen endlichen Werth; folglich wird die Grösse (70) für $\varepsilon = 0$ zu Null, und die Formel (69) giebt

$$\int \frac{1}{r} \Delta_2 \varphi dV = \int \frac{1}{r} P \cos(Pn) dS + \int \varphi \frac{1}{r^2} \cos(rn) dS - 4\pi\varphi, \qquad (71)$$

worin links über das ganze Volumen V zu integriren ist. Dies ist deshalb zulässig, weil der auf das Volumen der Kugel vom Radius ε bezügliche Theil des Integrals unendlich klein ist. Man kann nämlich $dV = r^2 dr d\sigma$, also

$$\int \frac{1}{r} \Delta_2 \varphi dV = \int \Delta_2 \varphi \,.\, r dr d\sigma$$

setzen; bezeichnet man nun mit $M(\Delta_2\varphi \,.\, r)$ den Mittelwerth aller der Werthe, welche die Function $\Delta_2\varphi \,.\, r$ für die auf einer beliebigen Richtung r zwischen dem Centrum O und der Kugeloberfläche vom Radius ε gelegenen Punkte hat, so ist

$$\int \frac{1}{r} \Delta_2 \varphi dV = \varepsilon \int_\sigma M(\Delta_2 \varphi \,.\, r) d\sigma, \qquad (72)$$

wo $\int_\sigma$ eine über die Kugeloberfläche σ auszudehnende Integration bedeutet. Hier hat nun $M(\Delta_2\varphi \,.\, r)$ bei unendlich kleinem ε einen unendlich kleinen Werth, und ausserdem ist $\int_\sigma$ mit ε multiplicirt; daher ist der Werth des Integrals (72) unendlich klein.

In Formel (71) kann man

$$P \cos(Pn) = \frac{d\varphi}{dn}$$

setzen, wenn $\frac{d\varphi}{dn}$ die Derivirte der Function φ bezüglich der

Verschiebung dn eines beliebigen Punktes der Fläche S längs der äusseren Normale von S bedeutet.

Löst man die Gleichung (71) nach φ auf, so erhält man einen bemerkenswerthen Ausdruck für den Werth, welchen diese Function in einem beliebigen Punkte O des Volumens V hat, nämlich:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r} \Delta_2 \varphi \, dV + \frac{1}{4\pi}\left[\int \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} dS + \int \varphi \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, dS\right]. \quad (73)$$

Diese Formel zeigt, dass *eine einwerthige continuirliche Function φ sich in jedem Punkte innerhalb eines gegebenen Volumens V bestimmen lässt, wenn bekannt ist: 1) der Werth ihres Differentialparameters zweiter Ordnung in jedem Punkte des Volumens, 2) der Werth der Function selbst für jeden Punkt der Oberfläche dieses Volumens und 3) für jeden Punkt der Oberfläche der Werth der Projection des Differentialparameters erster Ordnung auf die Normale der Oberfläche oder, was dasselbe ist, der Werth der Derivirten der Function φ bezüglich einer zu der Oberfläche normalen Verschiebung für jeden Punkt der Oberfläche.*

Ist der Werth von φ für jeden Punkt der Oberfläche S gegeben, so ist die derivirte Function von φ bezüglich jeder die Fläche S tangirenden Verschiebung bekannt. Zwei solche Derivirte in Verbindung mit der Derivirten $\frac{d\varphi}{dn}$ bezüglich einer normalen Verschiebung bestimmen die Grösse und Richtung des Differentialparameters erster Ordnung $\overline{P}$ in jedem Punkte der Fläche S.

Ist $\Delta_2 \varphi = 0$ für alle Punkte des Volumens V, so ist φ eine thermometrische Function; die Formel (73) giebt dann:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\left[\int \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn} dS + \int \varphi \frac{1}{r^2} \cos(rn)\, dS\right]. \quad (74)$$

Hieraus sieht man, dass *der Werth einer thermometrischen Function in jedem Punkte eines gegebenen Volumens sich bestimmen lässt, wenn für jeden Punkt der Oberfläche der Werth der Function selbst und der ihrer Derivirten bezüglich einer zur Oberfläche normalen Verschiebung bekannt sind.*

Der Theil der Formel (73), der die auf die Oberfläche ausgedehnten Integrale enthält, stellt immer eine thermometrische Function dar. Man hat nämlich aus (73):

$$\Delta_2\varphi = \Delta_2\int\left(-\frac{\Delta_2\varphi}{4\pi}\right)\cdot\frac{1}{r}\,dV$$

$$+\,\Delta_2\left\{\frac{1}{4\pi}\left[\int\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}\,dS + \int\varphi\,\frac{1}{r^2}\cos(rn)dS\right]\right\}.$$

Setzt man nun in der Formel (55), nämlich

$$\Delta_2\int\frac{\varrho\,dV}{r} = -4\pi\varrho,$$

$\varrho = -\frac{\Delta_2\varphi}{4\pi}$ ein, so folgt

$$\Delta_2\int\left(-\frac{\Delta_2\varphi}{4\pi}\right)\cdot\frac{1}{r}\,dV = \Delta_2\varphi;$$

daher ist:

$$\Delta_2\left\{\frac{1}{4\pi}\left[\int\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}\,dS + \int\varphi\,\frac{1}{r^2}\cos(rn)dS\right]\right\} = 0.$$

Hieraus folgt, dass jede nicht thermometrische Function φ sich als Summe zweier Functionen

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Delta_2\varphi}{r}\,dV,$$

$$\varphi'' = \frac{1}{4\pi}\left[\int\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}\,dS + \int\varphi\,\frac{1}{r^2}\cos(rn)dS\right] \qquad (75)$$

darstellen lässt. Diese Functionen besitzen folgende Eigenschaften: die erste, φ', ist eine nicht thermometrische Function für die Punkte des Volumens V und gehört zu der Functionsgattung (54), d. h. sie lässt sich durch das Integral von $\frac{1}{r}$, multiplicirt mit dem Element derjenigen Masse m, darstellen, deren Dichtigkeit in jedem Punkte des Volumens V durch $\varrho = -\frac{1}{4\pi}\Delta_2\varphi$ ausgedrückt ist; die zweite Function, φ'', ist eine thermometrische und bestimmt sich allein mit Hilfe der Werthe, welche die Function φ selbst und ihre Derivirte bezüglich einer Normalverschiebung für die Punkte der Oberfläche haben.

Nach Formel (74) hat man

$$\varphi'' = \frac{1}{4\pi}\left[\int\frac{1}{r}\frac{d\varphi''}{dn}\,dS + \int\varphi''\,\frac{1}{r^2}\cos(rn)dS\right];$$

subtrahirt man dies von dem Ausdruck (75), so folgt:

$$\frac{1}{4\pi}\left[\int \frac{1}{r}\frac{d\varphi'}{dn}\,dS + \int \varphi'\,\frac{1}{r^2}\cos(rn)\,dS\right] = 0,$$

d. h. der auf die Oberfläche des Volumens V bezügliche Theil ist für die Function φ' gleich Null.

Die Formeln (59), (64), (69), (73) finden sowohl in der reinen Analysis, als auch in der mathematischen Physik sehr wichtige Anwendung. Man nennt sie die *Green'schen Formeln*, weil dieser Geometer die Formeln (69) und (73) auf die Lösung von Problemen aus der Elektrostatik und dem Magnetismus angewendet hat.*)

---

*) S. die Abhandlung von Green: „An Essay on the application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism" in Crelle's Journal, Bd. 39, 44, 47.

Statik.

Capitel I.

Der continuirliche materielle Körper. — Der materielle Punkt. — Sätze der Mechanik, welche die Abhängigkeit der kinematischen Grössen der Bewegung eines materiellen Punktes von den Ursachen der Bewegung bestimmen. — Dynamische Masse eines Punktes und eines Körpers. — Maass der Kraft. — Geometrische Derivirte der Kraft. — Zusammensetzung der Kräfte. — Gleichheit der Action und Reaction der Molecularkräfte. — Trägheitsmittelpunkt. — Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes.

1. Die Statik und die Dynamik behandeln die Ruhe und die Bewegung der physischen Körper. Wenn man solche Ruhe- oder Bewegungszustände betrachtet, die von der inneren Structur des Körpers, d. h. von der Gestalt und Lage der die Materie des Körpers bildenden unmessbar kleinen Theilchen, nicht unmittelbar abhängig sind, so setzt man voraus, dass das ganze sichtbare Volumen des Körpers von continuirlicher Materie erfüllt sei; der wirkliche Körper wird also durch einen fingirten, continuirlichen Körper ersetzt, dessen Ruhe oder Bewegung genau oder wenigstens annähernd dieselben Erscheinungen darbietet, wie sie der wirkliche Körper zeigen würde.

Unter der Voraussetzung nun, dass das Volumen des Körpers continuirlich von Materie erfüllt sei, theilt man dasselbe in Differentialelemente von drei unendlich kleinen Dimensionen und bestimmt die Lage jedes solchen Elements durch die Lage eines seiner Punkte; daher repräsentirt ein solches Element einen Punkt, der mit einer gewissen Materie behaftet ist und heisst deshalb ein *materieller Punkt.*

Ueberhaupt betrachtet man einen Körper von endlichen oder unendlich kleinen Dimensionen als einen materiellen Punkt,

wenn man sich mit der Untersuchung der Ruhe oder Bewegung eines einzigen Punktes begnügt, der entweder dem Volumen des Körpers angehört, oder zwar ausserhalb desselben liegt, aber mit den Punkten des Körpers in geometrischer Verbindung steht. In diesem Sinne wird z. B. ein fallender Körper, ein Planet in seiner Translationsbewegung um die Sonne, ein in Bewegung begriffener Eisenbahnzug als Punkt behandelt. Zunächst werden wir unter einem materiellen Punkte einen continuirlichen Körper von drei unendlich kleinen Dimensionen verstehen.

2. Die Ruhe eines materiellen Punktes, sowie die Geschwindigkeit und alle Beschleunigungen seiner Bewegung, sind von zwei Ursachen abhängig: von der *Trägheit der Materie* und von den *Kräften*. Diese Abhängigkeit bestimmt sich auf Grund folgender Sätze, die man in der Mechanik als Hypothesen aufgestellt hat, die aber durch die Uebereinstimmung der aus ihnen gezogenen Schlussfolgerungen mit der Erfahrung ihre Bestätigung gefunden haben.

I. *Trägheit* nennt man eine Eigenschaft der Materie, die für einen einzelnen materiellen Punkt in Folgendem besteht: *ein in Ruhe befindlicher und von der ihn umgebenden Materie abgesonderter materieller Punkt bleibt im Zustande der Ruhe, d. h. er kann von selbst nicht anfangen sich zu bewegen.*

Er geräth in Bewegung durch die Anwesenheit von ausser ihm vorhandener Materie. Diese Einwirkung der äusseren Materie wird einer Ursache zugeschrieben, die man Kraft nennt.

Wenn sich ein materieller Punkt eine gewisse Zeit hindurch unter der Wirkung einer Kraft bewegt und diese Wirkung dann aufhört, so bewegt sich der Punkt in der nun folgenden Zeit infolge der Trägheit mit einer nach Grösse und Richtung constanten Geschwindigkeit, d. h. er bewegt sich gleichförmig längs einer gewissen geraden Linie.

Jedesmal, wenn ein Punkt sich gleichförmig in gerader Linie fortbewegt, wirkt auf ihn keine Kraft; daher ist die Kraft nicht nur die Ursache, infolge deren ein ruhender Punkt anfängt sich zu bewegen, sondern auch die Ursache der Beschleunigungen seiner Bewegung.

Ein Punkt, bei dessen Bewegung Beschleunigungen auftreten, unterliegt der ständigen Einwirkung einer Kraft.

II. *Eine Kraft kann dem ruhenden materiellen Punkte nicht augenblicklich eine Geschwindigkeit ertheilen, d. h. die Kraft muss während eines gewissen Zeitraums wirken, um dem Punkte eine gewisse Geschwindigkeit zu ertheilen.*

Die Beobachtung zeigt, dass, wenn eine Kraft bewirkt, dass ein ursprünglich ruhender Punkt den Weg σ in der Zeit τ durchläuft, die mittlere Geschwindigkeit $\frac{\sigma}{\tau}$ desto kleiner ist, je kleiner τ, und unendlich klein wird, wenn τ unendlich klein ist; daher ist die Grenze, der sich das Verhältniss $\frac{\sigma}{\tau}$ nähert, wenn τ sich der Null nähert, Null, d. h. *die Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung ist gleich Null.*

Diese Hypothese bestätigt sich vor allem durch die Gesetze des freien Falles. Der fallende Körper durchläuft nämlich infolge der Wirkung derjenigen Kraft, die man sein Gewicht nennt, einen dem Quadrate der Zeit proportionalen Weg; wenn man also das constante Verhältniss des durchlaufenen Weges zum Quadrat der Zeit mit a bezeichnet, so hat man $\sigma = a\tau^2$; folglich ist die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit τ gleich $\frac{\sigma}{\tau} = a\tau$: sie ist also unendlich klein für unendlich kleines τ und wird zu Null für $\tau = 0$. Die Hypothese lässt sich auf andere Kräfte entweder auf Grund der Analogie oder auch dadurch ausdehnen, dass man die Wirkung einer Kraft durch die Wirkung eines gewissen Gewichtes ersetzen kann.

Indessen giebt es in der Mechanik Kräfte, die man *augenblickliche* oder *Momentankräfte* nennt. Man hat unter dieser ungenauen Benennung solche Kräfte zu verstehen, die einem Punkte eine endliche messbare Geschwindigkeit in einer unmessbar kleinen, aber endlichen Zeit ertheilen. Derartige Kräfte treten z. B. bei dem Stoss der Körper auf.

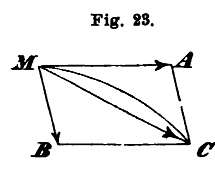
III. *Die Ursache einer aus mehreren anderen Bewegungen zusammengesetzten Bewegung* (vergl. Kinematik Cap. I) *ist die gleichzeitige Existenz derjenigen von einander unabhängigen Ursachen, welche die Bewegungscomponenten hervorbringen.* Umgekehrt *erzeugt die gleichzeitige und unabhängige Existenz der*

Ursachen mehrerer Bewegungen die aus jenen Bewegungen resultirende Bewegung.

Es genügt, diese Hypothese auf die folgende Annahme zu beschränken.

Wenn ein ruhender materieller Punkt M (Fig. 23) infolge der Trägheit oder der Wirkung einer Kraft während der Zeit t die geradlinige Wegstrecke MA und infolge der Wirkung einer anderen Kraft während derselben Zeit t die geradlinige Wegstrecke MB durchlaufen soll, so existiren bei der aus diesen beiden Bewegungen resultirenden, d. h. bei der Bewegung, für welche die Sehne $\overline{MC}$ des in der Zeit t durchlaufenen Weges die geometrische Summe $\overline{MA} + \overline{MB}$ ist, die Ursachen der beiden Bewegungscomponenten gleichzeitig. Umgekehrt, wenn die beiden Bewegungsursachen während der Zeit t zugleich bestehen, so erzeugen sie eine Bewegung, für welche die Sehne $\overline{MC}$ des durchlaufenen Weges die geometrische Summe $\overline{MA} + \overline{MB}$ derjenigen Wegstrecke ist, die der Punkt in der Zeit t unter Einwirkung jeder einzelnen Ursache für sich durchlaufen würde.

Fig. 23.



Die resultirende Bewegung ist geradlinig, wenn das Verhältniss der von dem Punkte in derselben Zeit bei den einzelnen Bewegungscomponenten durchlaufenen Wege constant ist. Nimmt man nämlich die Richtungen MA und MB zu Coordinatenaxen, so sind MA und MB die geradlinigen Coordinaten des Punktes C, der die Lage des beweglichen Punktes zur Zeit t bei der zusammengesetzten Bewegung angiebt; ist nun das Verhältniss $MA : MB$ constant, so ist auch die Richtung MC constant, mithin ist diese Gerade die Trajectorie des Punktes C. Hat man in diesem Falle $MA = af(t)$, wo a constant ist, so ist $MB = bf(t)$, wo b eine andere Constante bedeutet. Folglich sind die den Bewegungscomponenten entsprechenden Wege Functionen der Zeit von derselben Art. Der Weg bei der resultirenden Bewegung ist eine Function derselben Art; denn er ist:

$$MC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(AMB)} \,.\, f(t).$$

3. In der Kinematik wurde gezeigt, dass, wenn der bewegliche Punkt in der Zeit t die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen $\overline{v}$, $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, ... erlangt, die Bewegung in der darauf folgenden Zeit τ als zusammengesetzt angesehen werden kann aus geradlinigen Elementarbewegungen, deren Richtungen die von $\overline{v}$, $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, ... sind, während die in der Zeit τ zurückgelegten Wege durch die Functionen

$$v\tau, \quad \frac{1}{2} v_1 \tau^2, \quad \frac{1}{2.3} v_2 \tau^3, \quad \ldots . \quad \frac{1}{2.3 \ldots n} v_{n-1} \tau^n \tag{1}$$

ausgedrückt sind.

Auf Grund des Satzes III muss man annehmen, dass die Ursache der vorliegenden Bewegung während der Zeit τ das gleichzeitige Bestehen der Ursachen ist, die im Stande sind, die Elementarbewegungen (1) hervorzubringen, d. h. das gleichzeitige Bestehen der Ursache der geradlinigen gleichförmigen Bewegung mit der constanten Geschwindigkeit $\overline{v}$ und der Ursache der Bewegung, die sich aus allen den durch die Beschleunigungen verschiedener Ordnungen bestimmten Elementarbewegungen zusammensetzt.

Wenn ein ursprünglich in Ruhe befindlicher materieller Punkt unter der Wirkung einer Kraft in Bewegung geräth, so ist nach Satz II die Anfangsgeschwindigkeit Null; daher ist eine solche Bewegung nur durch die dem Beginne der Bewegung entsprechenden Beschleunigungen $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, ... bestimmt. Denken wir uns nun noch eine Kraft, die denselben ursprünglich ruhenden Punkt in eine Bewegung mit den Anfangsbeschleunigungen $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{u_3}$, ... versetzen würde. Nach Satz III schliessen wir dann, dass durch die gleichzeitige Wirkung beider Kräfte während der Zeit τ eine Bewegung vor sich gehen wird, die aus den längs $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, ... gerichteten geradlinigen Elementarbewegungen

$$\frac{1}{2} v_1 \tau^2, \quad \frac{1}{2.3} v_2 \tau^3, \quad \ldots$$

und den längs $\overline{u_1}$, $\overline{u_2}$, ... gerichteten geradlinigen Elementarbewegungen

$$\frac{1}{2} u_1 \tau^2, \quad \frac{1}{2.3} u_2 \tau^3, \quad \ldots$$

zusammengesetzt ist. Andererseits kann man aber dieselbe Bewegung betrachten als zusammengesetzt aus geradlinigen Elementarbewegungen, bei denen die Wege die Richtungen der geometrischen Summen

$$\overline{v_1} + \overline{u_1}, \quad \overline{v_2} + \overline{u_2}, \ldots$$

haben und durch die Functionen

$$\frac{1}{2}(\overline{v_1} + \overline{u_1})\tau^2, \quad \frac{1}{2.3}(\overline{v_2} + \overline{u_2})\tau^3, \ldots$$

dargestellt sind. *Das gleichzeitige Bestehen zweier Kräfte erzeugt also eine Bewegung, bei der die Anfangsbeschleunigungen die geometrischen Summen der entsprechenden Anfangsbeschleunigungen bei denjenigen Bewegungen sind, welche die Kräfte einzeln wirkend hervorbringen würden.* Ein solches gleichzeitiges Bestehen von zwei Kräften wird als das Bestehen nur einer einzigen Kraft betrachtet, die man die *Resultante* nennt. Die beiden Kräfte, welche die Resultante vertritt, heissen die *Componenten.*

Man sieht leicht, dass, wenn $\overline{a}$ und $\overline{b}$ die Sehnen der vom Punkte in der Zeit τ unter der Wirkung der einzelnen Componenten zurückgelegten Wege sind, die geometrische Summe $\overline{a} + \overline{b}$ die Sehne des in derselben Zeit τ unter der Wirkung der Resultante durchlaufenen Weges ist.

4. Es kann vorkommen, dass bei der gleichzeitigen Wirkung zweier Kräfte auf einen ursprünglich in Ruhe befindlichen Punkt dieser in Ruhe verbleibt; man sagt dann, die Kräfte halten sich im Gleichgewicht. Man hat in diesem Falle $\overline{a} + \overline{b} = 0$ für jedes τ, was erfordert, dass $\overline{v_1} + \overline{u_1} = 0$, $\overline{v_2} + \overline{u_2} = 0, \ldots$ und überhaupt $\overline{v_n} + \overline{u_n} = 0$ sei, oder $\overline{u_n} = -\overline{v_n}$. *Wenn also Kräfte im Gleichgewicht sind, so sind die Anfangsbeschleunigungen, die sie einzeln wirkend dem ursprünglich ruhenden Punkte ertheilen würden, entsprechend entgegengesetzt gleich.*

Infolge dessen betrachtet man die Wirkungen zweier im Gleichgewicht befindlichen Kräfte als entgegengesetzt gleich.

5. Wenn ein beweglicher materieller Punkt in der Zeit t die Geschwindigkeit $\overline{v}$ und die Beschleunigungen $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots$

erlangt hat, so erfolgt die Bewegung während der auf t folgenden Zeit τ infolge zweier Ursachen (nach Satz III), nämlich infolge der Trägheit und durch die Wirkung einer Kraft, die den Punkt mit den Beschleunigungen $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, ... bewegen würde, wenn er am Ende der Zeit t in Ruhe wäre.

Denken wir uns nun, die Kraft höre am Ende der Zeit t auf zu wirken infolge dessen, dass sie während der auf t folgenden Zeit τ sich mit einer anderen Kraft im Gleichgewicht befindet. In diesem Falle dauert die Bewegung während der Zeit τ nur infolge der Trägheit fort (s. Satz I) und muss daher geradlinig und gleichförmig sein. Man sieht nun leicht, dass die constante Geschwindigkeit dieser Bewegung die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit $\overline{v}$ ist. Wenn nämlich zu den Ursachen der Bewegung mit der Geschwindigkeit $\overline{v}$ und den Beschleunigungen $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, ... eine Kraft hinzutritt, die im Stande ist, den ursprünglich ruhenden Punkt mit den Beschleunigungen $-\overline{v_1}$, $-\overline{v_2}$, ... zu bewegen, so geht während der Zeit τ eine Bewegung vor sich, die zusammengesetzt ist aus den Elementarbewegungen

$$\overline{v\tau},\ \overline{\frac{1}{2}v_1\tau^2},\ \overline{\frac{1}{2.3}v_2\tau^3},\ \ldots$$

und

$$-\overline{\frac{1}{2}v_1\tau^2},\ -\overline{\frac{1}{2.3}v_2\tau^3},\ \ldots;$$

dies ergiebt aber eine Bewegung von der Geschwindigkeit $\overline{v}$ und den Beschleunigungen $\overline{v_1} - \overline{v_1}$, $\overline{v_2} - \overline{v_2}$, ..., die gleich Null sind, d. h. einfach eine Bewegung mit der constanten Geschwindigkeit $\overline{v}$.

Wenn also die Kraft aufhört auf den Punkt zu wirken, so dauert die Bewegung in Folge der Trägheit fort, und wird geradlinig und gleichförmig. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist die im Augenblick des Aufhörens der Wirkung der Kraft erlangte Geschwindigkeit, und die Bahn ist die Tangente der Bahn der ursprünglichen Bewegung an der Stelle, wo die Kraft zu wirken aufhört.

6. Die Kräfte können *constant* und *variabel* sein. Da die Wirkung einer Kraft darin besteht, gewisse Beschleunigungen

mitzutheilen, so wird eine Kraft als constant betrachtet, wenn sie eine Bewegung hervorbringt, deren Beschleunigungen sowohl nach Grösse als nach Richtung constant sind, d. h. eine Bewegung, bei der die Beschleunigungen nicht von der Zeit abhängen, so dass die Beschleunigung n^{ter} Ordnung $\overline{v_n}$ zur Zeit t denselben geometrischen Werth hat, wie zur Zeit $t + \tau$, was auch die Werthe von t und τ sein mögen. Damit nun die Beschleunigung erster Ordnung $\overline{v_1}$ nach Grösse und Richtung constant sei, ist erforderlich, dass alle ihre geometrischen Derivirten $\overline{v_2}$, $\overline{v_3}$, ... gleich Null seien; daher *giebt es bei einer Bewegung, die von der Wirkung einer constanten Kraft herrührt, keine Beschleunigungen zweiter und höherer Ordnung.* Daraus folgt, dass *eine constante Kraft, die auf einen ursprünglich in Ruhe befindlichen Punkt wirkt, eine geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringt.*

Hat dagegen der Punkt zur Zeit t schon eine gewisse Geschwindigkeit $\overline{v}$ erlangt und unterliegt er in der darauf folgenden Zeit τ der Wirkung einer constanten Kraft, so erhält er dadurch eine Bewegung, die aus einer geradlinigen gleichförmigen mit der Geschwindigkeit $\overline{v}$ und aus einer gleichförmig beschleunigten von der constanten Beschleunigung $\overline{v_1}$ zusammengesetzt ist. Diese zusammengesetzte Bewegung ist geradlinig, wenn $\overline{v}$ und $\overline{v_1}$ dieselbe Richtung und denselben oder entgegengesetzten Sinn haben; sie ist krummlinig, und zwar parabolisch (s. Kinematik § 6, Beisp. 1), wenn $\overline{v}$ und $\overline{v_1}$ verschiedene Richtungen haben.

7. *Zwei constante Kräfte, die im Stande sind, einen und denselben materiellen Punkt mit den Beschleunigungen a und b resp. zu bewegen, können als Grössen angesehen werden, die den entsprechenden Beschleunigungen proportional sind.* Gesetzt, die Beschleunigungen a und b seien commensurabel und c sei ihr gemeinsames Maass, so dass man hat:

$$a = mc, \quad b = nc.$$

Infolge des Satzes III lässt sich die Kraft, welche den gegebenen Punkt mit der Beschleunigung a bewegt, als die Resultante von m Kräften ansehen, deren jede im Stande ist, den-

selben Punkt mit der Beschleunigung c zu bewegen; daher kann man sagen, dass die mit der Beschleunigung a bewegende Kraft m mal so gross ist, als eine mit der Beschleunigung c bewegende Kraft. Ebenso ist die mit der Beschleunigung b bewegende Kraft n mal so gross, als die mit der Beschleunigung c bewegende Kraft. Folglich kann man die mit den Beschleunigungen a und b bewegenden Kräfte als Grössen ansehen, deren Verhältniss $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ ist.

Im Falle, dass die Beschleunigungen a und b incommensurabel sind, lässt sich leicht durch die Methode des Grenzübergangs oder durch reductio ad absurdum beweisen, dass die Kräfte als incommensurable Grössen zu betrachten sind, deren Verhältniss $\frac{a}{b}$ ist.

Hat man also eine beliebige bestimmte Kraft als Einheit, angenommen, so kann man die Kräfte, welche die Beschleunigungen a und b hervorbringen, durch zwei Zahlen A und B ausdrücken, die nur der Proportion

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

genügen müssen. Man sieht hieraus, dass für alle auf denselben materiellen Punkt wirkenden constanten Kräfte *das Verhältniss der Kraft zu der von ihr hervorgebrachten Beschleunigung constant ist.* Bezeichnet also μ dieses constante Verhältniss und ist F die Kraft, welche die Beschleunigung v_1 hervorbringt, so hat man $F = \mu v_1$.

Den Coefficienten μ, den wir den *dynamischen Coefficienten* nennen wollen, kann man als diejenige Kraft ansehen, die dem betreffenden Punkte eine Beschleunigung gleich der Längeneinheit ertheilt.

Wenn der dynamische Coefficient μ für zwei materielle Punkte denselben Werth hat, so betrachtet man die Materien dieser Punkte als gleichwerthig, wenn sie sich auch nach Volumen und physikalischen oder chemischen Eigenschaften von einander unterscheiden sollten. Die Beobachtung zeigt, dass nicht alle materiellen Punkte gleichwerthig sind, d. h. dass der dynamische Coefficient μ für verschiedene materielle Punkte im Allgemeinen verschiedene Werthe hat.

8. Versuche über den freien Fall zeigten **Galilei**, dass der freie Fall von einer nicht zu grossen Höhe herab im luftleeren Raume eine gleichförmig-beschleunigte Bewegung ist, und dass alle Körper an demselben Orte mit gleicher Beschleunigung fallen. Hieraus folgt, dass die die Elemente des fallenden Körpers bildenden materiellen Punkte, wenn sie von einander getrennt wären, sich in verticalen Linien gleichförmig-beschleunigt alle mit derselben Beschleunigung bewegen würden; sie unterliegen also der Einwirkung constanter Kräfte. Die diese Bewegungen erzeugenden Kräfte nennt man die *Gewichte der materiellen Punkte.* Wenn ein Körper fällt, so existiren die Gewichte aller der ihn zusammensetzenden materiellen Punkte zugleich und wirken unabhängig von einander; daher betrachtet man die Gesammtheit aller dieser Gewichte als das Gewicht des ganzen Körpers und sieht dasselbe als diejenige Kraft an, welche den ganzen Körper fallen macht. Bezeichnet man die dynamischen Coefficienten der Gewichte der den fallenden Körper bildenden materiellen Punkte mit $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ und die Beschleunigung beim Falle des Körpers mit g, so sind die Grössen

$$\mu g, \mu' g, \mu'' g, \ldots$$

die Gewichte der materiellen Punkte, und ihre Summe $g\Sigma\mu$ ist das Gewicht des ganzen Körpers. *Die Summe* $m = \Sigma\mu$ *der dynamischen Coefficienten der Gewichte der materiellen Punkte, die einen Körper bilden,* nennt man die *Gewichtsmasse* oder die *wägbare Masse* des Körpers. Dieselbe ist gleich dem Gewichte des ganzen Körpers, dividirt durch die Beschleunigung des Falles. Die dynamischen Coefficienten $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ sind die Gewichtsmassen der entsprechenden materiellen Punkte. Sind alle materiellen Punkte gleichwerthig, d. h. haben sie gleiche Gewichte, so ist $\mu = \mu' = \mu'' = \cdots$ und $\Sigma\mu = n\mu$, wenn n die Anzahl der den Körper bildenden gleichwerthigen materiellen Punkte ist; daher ist *die Gewichtsmasse eines Körpers proportional der Anzahl der in ihm enthaltenen gleichwerthigen materiellen Punkte.* Auf Grund dessen betrachtet man die Gewichtsmasse eines Körpers als die *Quantität der Materie des Körpers.*

9. Ist u das Volumen eines materiellen Punktes, dessen Gewicht μg ist, so nähert sich die Masse μ der Null, wenn

alle drei Dimensionen des Volumens u sich der Null nähern; dabei nähert sich das Verhältniss $\frac{\mu}{u}$ einer gewissen Grenze ϱ, die man die *Dichtigkeit der Gewichtsmasse des Körpers in demjenigen Punkte* nennt, *mit dem alle Punkte des Volumens u zusammenfallen.* Im Allgemeinen ist ϱ eine Function des betreffenden Punktes. Hat ϱ denselben Werth für alle Punkte des Körpers, so ist die Gewichtsmasse homogen; sie ist dann gleich dem Product der Dichtigkeit in das ganze Körpervolumen. Ist dagegen die Masse m nicht homogen und bezeichnet man mit V das Volumen des Körpers, mit dV ein Differentialelement desselben von drei unendlich kleinen Dimensionen und mit ϱ die Dichtigkeit in dem den Ort dieses Elementes bestimmenden Punkte, die eine Function der Coordinaten dieses Punktes ist, so hat man für das Element der Gewichtsmasse den Ausdruck $dm = \varrho dV$. Daher ist das über das ganze Volumen V ausgedehnte Integral $\int \varrho dV$ die ganze Gewichtsmasse m. Das Product mg stellt dann das Gewicht des ganzen Körpers dar. Um aber nun die Gewichtsmasse durch eine Zahl auszudrücken, wählt man als Einheit die Masse eines beliebigen bestimmten Körpers, z. B. die Masse eines *Grammes*, *Pfundes*, *Lothes* oder dgl. Dann ist die Zahl, welche die Gewichtsmasse eines Körpers ausdrückt, gleich dem Verhältniss des Gewichts dieses Körpers zu dem Gewichte desjenigen Körpers, dessen Masse als Einheit gewählt wurde.

Ist nun in der Formel $P = mg$, die das Gewicht des Körpers darstellt, die Masse m in derartigen Einheiten ausgedrückt, so hat man für $m = 1$ die Relation $P = g$, welche aussagt, dass die Beschleunigung das Gewicht der Masseneinheit repräsentirt. Dieser Ausdruck für das Gewicht der Masseneinheit wird oft die *Schwerkraft* oder die *Intensität der Schwerkraft* genannt.

10. Wenn in dem oben gefundenen allgemeinen Ausdruck $F = \mu v_1$ für eine beliebige, auf einen materiellen Punkt wirkende Kraft der dynamische Coefficient μ unabhängig ist von der Grösse und Richtung der Beschleunigung $\overline{v_1}$ und wenn F für $v_1 = g$ dem Gewichte des materiellen Punktes gleich wird, so ist der dynamische Coefficient μ die Gewichtsmasse des

materiellen Punktes, und *man erhält das Maass der Kraft F, wenn man die Beschleunigung v_1 mit der Gewichtsmasse des materiellen Punktes multiplicirt.*

Es giebt Kräfte, für die man bei derselben Gewichtsmasse ein anderes Maass wählen muss. Der dynamische Coefficient μ in dem Ausdrucke $F = \mu v_1$ bedeutet nämlich nicht immer die Gewichtsmasse des materiellen Punktes. Hierhin gehören z. B. die Kräfte, welche bewirken, dass der eine Endpunkt der Magnetnadel sich nach Norden wendet, der andere nach Süden.

Diese Kräfte, die man die Kräfte des Erdmagnetismus nennt, wirken nicht auf die Nadel, wenn sie nicht magnetisirt ist; ihre Wirkung kommt vielmehr erst zum Vorschein, wenn die Nadel durch einen ganz bestimmten Process magnetisch gemacht worden ist; dabei ändert sich aber die Gewichtsmasse der Nadel nicht. Diese Kräfte theilen sich in zwei Gruppen; die eine derselben würde, wenn sie allein wirkte, ähnlich wie das Gewicht des Körpers, verursachen, dass die materiellen Elemente des Nordendes der Nadel sich mit constanten und gleichen Beschleunigungen in einer und derselben Richtung nach dem Nordpole hinbewegten. Die Beobachtung lehrt, dass das Verhältniss der auf ein solches Element wirkenden Kraft zu der Beschleunigung der Bewegung, d. h. der dynamische Coefficient, der Gewichtsmasse des Elements nicht proportional gesetzt werden kann; deshalb nimmt man an, dass im Nordende der Magnetnadel ausser der wägbaren Materie noch eine unwägbare Materie vorhanden sei, deren Masse die Summe der dynamischen Coefficienten derjenigen Kräfte ist, welche die Theilchen dieser Materie nach dem Nordpole ziehen. Die Theilchen dieser selben magnetischen Materie werden von dem Südpole durch die zweite Gruppe von Kräften abgestossen, und zwar ebenfalls alle in derselben Richtung und mit derselben Beschleunigung. Man muss also auch annehmen, dass in dem nach Süden gewandten Pole der Magnetnadel eine unwägbare Materie vorhanden ist, die die entgegengesetzten Eigenschaften hat, wie die am Nordende der Nadel befindliche Materie; denn ihre Elemente werden vom Nordpol abgestossen und vom Südpol angezogen.

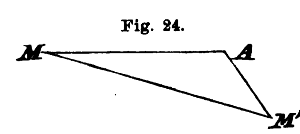
Die Untersuchungen über die Erscheinungen der Elektricität haben zu der Hypothese der Existenz einer unwägbaren elektrischen Materie geführt. Das Licht betrachtet man als die Bewegung einer unwägbaren Materie, die man Aether nennt und die eine ihr eigenthümliche Art von Masse hat.

11. Wenn man den dynamischen Coefficienten die Masse desjenigen materiellen Punktes nennt, auf den eine constante Kraft einwirkt, so kann man sagen, dass das Mass einer Kraft das Product der Masse in die Beschleunigung ist, mit der ein Punkt sich unter der Wirkung der Kraft bewegt. Behufs der geometrischen Darstellung der Kraft ist man übereingekommen sie durch eine Strecke darzustellen, die so viel beliebige lineare Einheiten enthält, als Krafteinheiten in ihrem Masse enthalten sind; dabei trägt man diese Strecke auf der Richtung der Beschleunigung derart auf, dass der Anfangspunkt der Strecke in den Punkt fällt, auf welchen die Kraft wirkt. Diesen Punkt nennt man den *Angriffspunkt der Kraft.*

12. Wenn bei der Bewegung eines materiellen Punktes Beschleunigungen höherer Ordnungen auftreten, so ändert sich die Beschleunigung erster Ordnung, folglich bleibt auch die bewegende Kraft während der Zeit der Bewegung nicht constant. Eine Vorstellung von der Aenderung der Wirkung einer nicht constanten Kraft kann man durch die Beschleunigungen höherer Ordnung erlangen.

Es seien $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \ldots$ die Beschleunigungen zur Zeit t bei der Bewegung eines Punktes, dessen Masse m ist. Die Ursachen der Bewegung während der auf t folgenden Zeit τ sind die Trägheit und eine Kraft, welche die Elementarbewegungen $\frac{1}{2} v_1 \tau^2, \frac{1}{2 \cdot 3} v_2 \tau^3, \ldots$ (vergl. Satz III und § 3) in den Richtungen der Beschleunigungen $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots$ hervorruft. Die erste dieser Bewegungen entsteht durch eine constante Kraft $\overline{m v_1}$. Man ist übereingekommen, diese constante Kraft als den Werth der veränderlichen bewegenden Kraft zur Zeit t anzusehen.

Fig. 24.



Stellt nun $\overline{MA}$ (Fig. 24) den Weg $\frac{1}{2} v_1 \tau^2$, $\overline{AM'}$ die geo-

metrische Summe aller übrigen Elementarwege $\overline{\frac{1}{2\cdot 3} v_2 \tau^3}, \ldots$ dar, so ist $\overline{MM'}$ die Sehne desjenigen Weges, welchen der Punkt m in der Zeit τ unter der Einwirkung der fraglichen Kraft durchlaufen würde, wenn er im Anfange dieser Zeit in Ruhe gewesen wäre. Denken wir uns nun eine constante Kraft, die im Stande ist den Punkt m zu zwingen, in der Zeit τ den geradlinigen Weg MM' zu durchlaufen; u sei die Beschleunigung dieser Bewegung. Da $MM' = \frac{1}{2} u\tau^2$ ist, so hat man $u = \frac{2MM'}{\tau^2}$, und eine auf $\overline{MM'}$ aufgetragene Strecke $\overline{mu}$ repräsentirt diese Kraft. Man kann die Kraft $\overline{mu}$ den Mittelwerth der betreffenden variablen Kraft nennen. Der Werth der Kraft $\overline{mv_1}$ zur Zeit t ist die Grenze, der sich der Mittelwerth $\overline{mu}$ nähert, wenn τ sich der Null nähert. Da nämlich $\overline{MM'} = \overline{MA} + \overline{AM'}$ und $v_1 = \frac{2MA}{\tau^2}$ ist, so hat man

$$\overline{mu} = \overline{mv_1} + \frac{\overline{2mAM'}}{\tau^2}.$$

Für $\tau = 0$ verschwindet das letzte Glied, da AM' eine unendlich kleine Grösse von höherer Ordnung als τ^2 ist; mithin fällt die Kraft $\overline{mu}$ für $\tau = 0$ mit $\overline{mv_1}$ zusammen.

Mit Hilfe der Beschleunigungen höherer Ordnungen $\overline{v_2}, \overline{v_3}, \ldots$ bestimmt sich das dem Zeitincrement τ entsprechende geometrische Increment der Kraft $\overline{mv_1}$. Das geometrische Increment der Beschleunigung $\overline{v_1}$ ist (s. Kinemat. Cap. V):

$$\overline{v_2\tau} + \overline{\tfrac{1}{2} v_3\tau^2} + \cdots;$$

folglich ist das geometrische Increment der Kraft $\overline{mv_1}$ gleich

$$\overline{mv_2\tau} + \tfrac{1}{2}\overline{mv_3\tau^2} + \cdots,$$

wobei die Glieder der Summe resp. die Richtungen von $\overline{v_2}, \overline{v_3}, \ldots$ haben. Die Grössen $\overline{mv_2}, \overline{mv_3}, \ldots$ sind hierin die successiven geometrischen Derivirten der Kraft $\overline{mv_1}$. Schell („Theorie der Bewegung und der Kräfte", 2. Aufl., II. Bd., S. 4) schlägt vor, die Grössen $\overline{mv_1}, \overline{mv_2}, \overline{mv_3}, \ldots$ Kräfte 1., 2., 3., ... Ordnung zu nennen. Mit Beibehaltung des einfachen Namens Kraft für

mv_1 kann man die Grössen $\overline{mv_2}$, $\overline{mv_3}$, ... *Anstrengungen 1., 2., ... Ordnung nennen.**)

13. Man kann die Kraft $\overline{mv_1}$ als die geometrische Derivirte einer auf der Richtung der Geschwindigkeit aufzutragenden Strecke, gleich dem Producte der Masse m in die Geschwindigkeit v, betrachten. Die Grösse $\overline{mv}$ nennt man die *Quantität oder Grösse der Bewegung.* Bezeichnet man mit r einen von einem festen Punkte O nach dem beweglichen Punkte m gezogenen Radiusvector und trägt man auf ihm vom Punkte O aus eine dem Producte $\overline{mr}$ gleiche Strecke auf, so ist die Bewegungsgrösse $\overline{mv}$ die geometrische Derivirte erster Ordnung von $\overline{mr}$; die Kraft $\overline{mv_1}$ ist ihre geometrische Derivirte zweiter Ordnung. Daher kann man die geometrische Function der Zeit, $\overline{mr}$, ansehen als ursprüngliche Function für die Quantität der Bewegung $\overline{mv}$, für die Kraft $\overline{mv_1}$ und für alle Anstrengungen $\overline{mv_2}$, $\overline{mv_3}$, ... Die Strecke $\overline{mr}$ ist das, was wir das polare Moment der Masse m bezüglich des Pols O nannten (s. Einleitung in die Statik und Dynamik § 10).

14. Es sei $\overline{OA}$ (Fig. 25) eine der Bewegungsgrösse $\overline{mv}$ geometrisch gleiche Strecke. Der Endpunkt A dieser Strecke beschreibt bei der Bewegung des Punktes m den Hodographen der Bewegungsgrösse, und zwar mit einer Geschwindigkeit gleich der Kraft $\overline{mv_1}$. Wenn $\overline{OA}$ nach Verlauf der Zeit τ in $\overline{OB}$ übergeht, so ist die Sehne $\overline{AB}$ des von dem Punkte A durchlaufenen Weges das geometrische Increment der Bewegungsgrösse $\overline{mv}$. Dasselbe ist äusserst klein für sehr kleines τ, wenn die Kraft $\overline{mv_1}$ nicht sehr grosse Werthe zu dieser Zeit hat. Bei sehr grossem Werthe von mv_1 aber, oder wenn $\overline{mv_1}$ in sehr kurzer Zeit τ von Null an sehr schnell wächst, hat AB eine bedeutende Grösse, was eine bedeutende Aenderung der Bewegungsgrösse

Fig. 25.

*) Der vom Verfasser gewählte Ausdruck entspricht etwa dem französischen „effort", wofür im Deutschen kaum ein vollkommenes Aequivalent zu finden sein dürfte. Anm. d. Uebersetzers.

$\overline{mv}$ und der Geschwindigkeit $\overline{v}$ während der kurzen Zeit τ zur Folge hat. Eine Kraft, die in einer kurzen, unmessbar kleinen Zeit eine bedeutende Zunahme der Bewegungsgrösse hervorbringt, nennt man eine *Momentankraft.* Das Verhältniss $\frac{AB}{\tau}$, d. h. die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes A, stellt den Mittelwerth aller der Werthe dar, die die Kraft $\overline{mv_1}$ während der Zeit τ annimmt. Ist das Aenderungsgesetz der Momentankräfte nicht bekannt, so vergleicht man bei Betrachtung derartiger Kräfte ihre Mittelwerthe. Bei derselben Zeit sind diese Mittelwerthe den entsprechenden Incrementen der Bewegungsgrössen proportional; man kann daher das Increment der Bewegungsgrösse als mittleres Maass der Momentankraft betrachten. Zu den Momentankräften gehören die Kräfte, deren Wirkung beim Stosse der Körper auftritt.

15. Wir geben nun Beispiele für die oben behandelten Grössen.

1) In der Kinematik (S. 18 und 34) ist die Bewegung untersucht worden, bei der die geradlinigen rechtwinkligen Coordinaten des beweglichen Punktes durch die Functionen

$$x = \alpha \cos(kt) + \alpha' \sin(kt),$$
$$y = \beta \cos(kt) + \beta' \sin(kt),$$
$$z = \gamma \cos(kt) + \gamma' \sin(kt)$$

ausgedrückt sind. Wir fanden dort, dass 1) die Bahn eine Ellipse ist, deren Centrum im Coordinatenursprung liegt; 2) dass der Hodograph der Geschwindigkeit eine über denselben conjugirten Durchmessern construirte und der Bahncurve ähnliche Ellipse ist; 3) dass, wenn r der vom Centrum der Ellipsen nach dem beweglichen Punkte gezogene Radiusvector ist, die Geschwindigkeit $\overline{v}$ die zu r conjugirte Richtung hat und gleich

$$k\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}$$

ist, wo a und b zwei conjugirte Semidiameter der Trajectorie sind; 4) dass die Beschleunigungen sich durch die Formeln

$$\overline{v_{2n-1}} = \overline{(-1)^n k^{2n} r}, \quad \overline{v_{2n}} = \overline{(-1)^n k^{2n} v}$$

bestimmen. Ist daher m die Masse des beweglichen Punktes, so ist

$$mk\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}$$

die Bewegungsgrösse; mk^2r ist die Grösse der Kraft und hat die dem r entgegengesetzte Richtung; folglich zieht diese Kraft den Punkt m in der Richtung nach dem Centrum der Trajectorie an. Die Grösse der Anstrengung erster Ordnung ist:

$$mk^2v = mk^3\sqrt{a^2 + b^2 - r^2};$$

dieselbe hat die der Geschwindigkeit v entgegengesetzte Richtung.

2) In der Kinematik S. 48 und 49 war bewiesen worden, dass wenn sich ein Punkt m so bewegt, dass der vom Radiusvector $Om = r$ beschriebene Flächenraum der Zeit proportional ist, die Beschleunigung erster Ordnung v_1 die Richtung des Radiusvectors r hat; daher hat auch die Kraft mv_1 diese Richtung. Sie stösst den Punkt m von O ab, wenn sie dem Sinne nach mit r übereinstimmt; sie zieht ihn an, wenn sie den dem r entgegengesetzten Sinn hat. Mit Hilfe der Gleichung der Bahn lässt sie sich als Function des Radiusvectors r darstellen (s. Kinematik S. 49 Formel (d)), d. h. man kann sie in der Form $mf(r)$ ausdrücken. In dem speciellen Falle, wenn die Trajectorie ein Kegelschnitt und der Pol O einer der Brennpunkte ist, hat man $f(r) = \frac{4c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$, wo c der in der Zeiteinheit vom Radiusvector r beschriebene Flächenraum und p der halbe Parameter des Kegelschnittes ist. *Wenn also ein materieller Punkt derart einen Kegelschnitt beschreibt, dass die von dem aus einem Brennpunkte gezogenen Radiusvector beschriebenen Flächenräume den entsprechenden Zeiten proportional sind, so wirkt auf den beweglichen Punkt eine ihn nach dem Brennpunkt hin anziehende Kraft*; *die Grösse derselben ist proportional der Masse des Punktes und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes von dem Brennpunkte.*

16. Mehrere zu derselben Zeit auf denselben materiellen Punkt von der Masse m wirkende Kräfte

$$\overline{mv_1}, \overline{mv_1'}, \overline{mv_1''}, \ldots$$

bringen eine Bewegung hervor, deren Beschleunigung die geometrische Summe

$$\overline{v_1} + \overline{v_1'} + \overline{v_1''} + \cdots$$

derjenigen Beschleunigungen ist, welche die Kräfte, wenn sie einzeln auf den Punkt wirkten, hervorbringen würden (s. Satz III und § 3). Daher kann die Bewegung, welche diese Kräfte zusammen hervorbringen, auch von einer einzigen Kraft

$$m(\overline{v_1} + \overline{v_1'} + \overline{v_1''} + \cdots) = \overline{mv_1} + \overline{mv_1'} + \overline{mv_1''} + \cdots$$

erzeugt werden. Man schliesst hieraus, *dass die Resultante mehrerer Kräfte die geometrische Summe der Componenten ist.*

Für den speciellen Fall zweier Componenten ergiebt sich als Resultante *die Diagonale des über den Componenten als zwei anstossenden Seiten construirten Parallelogramms.* Hierin besteht der bekannte Satz, den man das *Parallelogramm der Kräfte* nennt. Derselbe ist von Stevin*) gefunden und von Newton**) aus dem Satze III als Folgerung abgeleitet worden.

17. Eine auf einen beliebigen materiellen Punkt wirkende Kraft stellt sich als die Resultante von Kräften dar, die von der Wirkung anderer materieller Punkte auf jenen Punkt herrühren; daher setzen sich alle Naturkräfte zusammen aus den Kräften der gegenseitigen Einwirkung zweier materieller Punkte auf einander; solche Kräfte nennt man im Allgemeinen *Molecularkräfte.*

Diese Kräfte können *innere* und *äussere* sein. Innere Kräfte heissen solche, die von der gegenseitigen Wirkung der materiellen Elemente oder Punkte eines und desselben Körpers herrühren; äussere in Bezug auf den betreffenden Körper heissen solche, die von der Wirkung von materiellen Punkten, die einem anderen Körper angehören, auf seine materiellen Punkte herrühren.

Die Beobachtungen der Bewegung wägbarer Körper auf der Erde und im Weltraume, die sich durch die gegenseitige Anziehung der wägbaren Punkte proportional den Massen und umgekehrt proportional den Quadraten der Abstände erklären lassen, sowie auch sämmtliche elektrische und magnetische Erscheinungen, die durch eigenartige Kräfte erklärt werden

---

*) Statique. Leyde 1633.

**) Philosophiae naturalis principia mathematica, lex III, coroll. I (ed. Le Seur 1760, p. 24).

welche zwischen nichtwägbaren materiellen Punkten wirken, bestätigen die folgende Hypothese:

Wenn zwei materielle Punkte von aller übrigen Materie abgesondert, d. h. der Einwirkung aller übrigen materiellen Punkte auf sie entzogen werden, so gerathen sie in Bewegung durch zwei entgegengesetzt gleiche, in die Richtung ihrer Verbindungslinie fallenden Kräfte.

Entfernen sich die Punkte dabei von einander, so nennt man die Kräfte *abstossende* oder *repulsive*, nähern sie sich einander, so nennt man sie *anziehende* oder *attractive*. Wenn wir auf irgend eine Weise der Bewegung der Punkte ein Hinderniss entgegensetzen könnten und dann uns denken, dass die eine Kraft zu wirken strebt, so würde die andere Kraft ihr entgegen zu wirken streben; deshalb spricht Newton die angeführte Hypothese in Form des Gesetzes aus, dass *die Action der Reaction gleich ist.**)

Es genügt, diese Hypothese für zwei materielle Punkte, die gleiche Massen haben, vorauszusetzen; dass sie sich auch auf Punkte mit ungleichen Massen bezieht, ergiebt sich in folgender Weise aus Satz III.

Gesetzt, zwei materielle Punkte haben zwei commensurable Massen m und m', deren gemeinsames Maass μ etwa $n$mal in m und n'mal in m' enthalten sei, so dass also $m = n\mu$ und $m' = n'\mu$ ist. Bezeichnet nun f die Kraft, mit welcher ein Theil Masse $= \mu$ von m' auf einen Theil Masse $= \mu$ von m einwirkt, so hat man nach Satz III anzunehmen, dass die Kraft, mit welcher die ganze Masse m' auf einen Massentheil μ von m einwirkt, gleich $n'f$ ist und dieselbe Richtung wie f hat, nämlich die Richtung der Geraden mm'. Solcher Kräfte sind n vorhanden, nämlich so viel, wie oft μ in m enthalten ist; diese n Kräfte lassen sich durch eine einzige Kraft $nn'f$ von derselben Richtung und demselben Sinne, wie f, ersetzen. Ebenso findet man, dass die Kraft, mit der m auf m' wirkt, ebenfalls gleich $nn'f$, aber von entgegengesetztem Sinne wie jene erste Kraft ist. Da dieser Schluss für alle beliebigen Zahlen n und n' gilt, so muss er auch für incommensurable

*) Phil. nat. princ. math., lex III (ed. Le Seur 1760, p. 23).

Massen m und m' gelten, für welche n und n' unendlich grosse Werthe haben.

Bezeichnet man mit $\overline{v_1}$ und $\overline{v'_1}$ die Beschleunigungen erster Ordnung bei denjenigen Bewegungen, welche die materiellen Punkte m und m' infolge ihrer gegenseitigen Wirkung auf einander haben, so ist $\overline{mv_1}$ die *Kraft* der Wirkung von m' auf m, und $\overline{m'v'_1}$ die Kraft der Wirkung von m auf m'. Daher lässt sich das Gesetz der *Gleichheit von Action und Reaction* in folgender Form ausdrücken:

$$\overline{mv_1} + \overline{m'v'_1} = 0.$$

18. *Gesetz der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes.* Man denke sich ein System von materiellen Punkten, deren Oerter und Massen mit $m, m', m'', \ldots$ bezeichnet werden mögen; C sei der Mittelpunkt des ganzen Systems (s. Einleit. § 10). Man ziehe nun aus einem beliebigen Pole O die Radienvectoren $r, r', r'' \ldots$ nach den Punkten $m, m', m'', \ldots$ und bilde die polaren Momente $\overline{mr}, \overline{m'r'}, \overline{m''r''}, \ldots$, die resp. auf $r, r', r'', \ldots$ von O aus aufzutragen sind. Mit Hilfe dieser Momente lässt sich der Radiusvector $\overline{R} = OC$ des Mittelpunktes C bestimmen; derselbe ist nämlich

$$\overline{R} = \frac{\Sigma \overline{mr}}{\Sigma m}, \qquad (a)$$

wo $\Sigma \overline{mr}$ die geometrische Summe $\overline{mr} + \overline{m'r'} + \cdots$ bezeichnet. Der Mittelpunkt C des Massensystems $m, m', m'', \ldots$ heisst der *Trägheitsmittelpunkt* dieses Systems wegen einer Eigenschaft, die wir nun beweisen wollen.

Bei der Bewegung der Punkte $m, m', m'', \ldots$ kann sich auch der Mittelpunkt C bewegen; dann wird $\overline{R}$, ebenso wie $\overline{r}, \overline{r'}, \overline{r''}, \ldots$, eine geometrische Function der Zeit; die geometrischen Derivirten von $\overline{R}$ lassen sich (nach Kinem. § 21) aus der allgemeinen Formel

$$\overline{R_n} = \frac{\Sigma \overline{mr_n}}{\Sigma m} \qquad (b)$$

bestimmen, die man durch geometrische Differentiation des Ausdrucks (a) erhält.

Diese Formel zeigt, dass die geometrische Derivirte beliebiger Ordnung von dem Radiusvector $\overline{R}$ der mittlere geometrische Summand der geometrischen Derivirten derselben Ordnung von den nach den Punkten $m, m', m'', \ldots$ gezogenen Radienvectoren ist.*) Man schliesst hieraus:

1) *Die Geschwindigkeit* R_1 *der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes eines Systems von materiellen Punkten ist der mittlere geometrische Summand aus den gleichzeitigen Geschwindigkeiten aller Systempunkte. Diese Geschwindigkeit, multiplicirt mit der Summe der Massen aller Punkte, d. h. die Grösse* $R_1 \Sigma m$, *lässt sich ansehen als die Quantität der Bewegung eines einzigen im Trägheitsmittelpunkte liegenden Punktes, dessen Masse gleich der Summe der Massen aller Punkte ist.* Diese Grösse kann man *die Bewegungsgrösse der ganzen im Trägheitsmittelpunkte concentrirten Masse des Punktsystems* nennen. Nach Formel (b) hat man $R_1 \Sigma m = \overline{\Sigma m r_1}$, d. h. *die Bewegungsgrösse der ganzen im Trägheitsmittelpunkte concentrirten Masse ist gleich der geometrischen Summe der Bewegungsgrössen der einzelnen materiellen Punkte.*

2) *Die Beschleunigung erster Ordnung* R_2 *der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes ist der mittlere geometrische Summand aus den gleichzeitigen Beschleunigungen derselben Ordnung der Bewegung jedes einzelnen materiellen Punktes. Man kann diese Beschleunigung als von der Wirkung einer im Trägheitsmittelpunkte angreifenden Kraft* $R_2 \Sigma m$ *herrührend ansehen, die der geometrischen Summe* $\overline{\Sigma m r_2}$ *aller auf die Systempunkte wirkenden Kräfte gleich ist, d. h. von der Wirkung der Resultante aller dieser, geometrisch nach dem Trägheitsmittelpunkte verlegten Kräfte.*

Die geometrische Summe $\overline{\Sigma m r_2}$ besteht aus der geometrischen Summe aller auf die Punkte $m, m', m'', \ldots$ wirkenden äusseren Kräfte und aus der Summe aller inneren Kräfte; diese letztere Summe ist aber Null; denn sie besteht wegen der Gleichheit von Action und Reaction aus paarweise entgegengesetzt gleichen Gliedern; daher reducirt sich $\overline{\Sigma m r_2}$ auf die Summe aller äusseren Kräfte, so dass also *die Beschleuni-*

*) Dabei ist vorausgesetzt, dass sich jeder der Radienvectoren $r, r', r'', \ldots$ mehrmals wiederholt, und dass die Anzahlen der Wiederholungen den Massen $m, m', m'', \ldots$ proportional sind.

gung der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes von den inneren Kräften unabhängig ist.

Wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind, so ist $\overline{\Sigma m r_2} = 0$, also auch $R_2 = 0$. Wenn nun diese Bedingung eine gewisse auf t folgende Zeit hindurch erfüllt ist, so ist *der Trägheitsmittelpunkt entweder in Ruhe oder er bewegt sich geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit R_1.*

Wenn die materiellen Punkte $m, m', m'', \ldots$ einen continuirlichen Körper bilden, so kann man sagen, dass *der Trägheitsmittelpunkt der Masse des Körpers entweder in Ruhe ist oder sich mit constanter Geschwindigkeit bewegt, wenn auf den Körper keine äusseren Kräfte wirken.* Es ist dies eine Ausdehnung des für einen einzelnen materiellen Punkt aufgestellten Satzes I über die Trägheit auf einen Körper von endlichen Dimensionen.*)

Wenn sich der Trägheitsmittelpunkt in Folge der Wirkung äusserer Kräfte auf die materiellen Elemente der Masse des Körpers bewegt und jene Wirkung zur Zeit t auf irgend eine Weise unterbrochen wird oder wenn diese Wirkung zwar fortdauert, aber die geometrische Summe aller Kräfte nach der Zeit t gleich Null bleibt, so ist die Bewegung in der auf t folgenden Zeit eine geradlinige gleichförmige mit einer Geschwindigkeit gleich dem mittleren geometrischen Summanden der von allen Elementen der Körpermasse erlangten Geschwindigkeiten.

Sehr oft beschränkt man sich auf die Betrachtung der Bewegung des Trägheitsmittelpunktes des Körpers, indem man diesen als einen materiellen Punkt ansieht, der im Trägheitsmittelpunkt liegt und dessen Masse gleich der des ganzen Körpers ist.

---

*) Phil. nat. princ. math., lex III, coroll. IV (ed. Le Seur 1760, p. 36).

Capitel II.

Potential einer Kraft. — Definition der Kraft vermittelst ihres Potentials. — Potential der Kraft der gegenseitigen Wirkung zweier Punkte auf einander, wenn diese Kraft eine Function des Abstandes der Punkte allein ist. — Zusammensetzung von derartigen Kräften. — Resultante der Kräfte, die durch die Wirkung einer continuirlichen Masse auf einen gegebenen Punkt entstehen. — Potential dieser Resultante. — Kräfte, die den Quadraten der Abstände der auf einander wirkenden Punkte von einander umgekehrt proportional sind.

19. Sehr häufig tritt die Kraft als Differentialparameter erster Ordnung einer Function ihres Angriffspunktes auf. Eine solche Function nennt man das *Potential* der Kraft.

Kennt man das Potential einer Kraft, so kann man Grösse und Richtung der Kraft nach den in den Cap. VII und XII der Kinematik behandelten Regeln zur Bestimmung der Differentialparameter erster Ordnung finden. *Wenn φ das Potential einer Kraft P ist, so hat diese Kraft P die Richtung derjenigen Normalen der Niveaufläche (φ), die im Angriffspunkte der Kraft nach der Seite hin errichtet ist, wohin sich der Punkt verschieben muss, damit das Potential φ wächst. Die Grösse der Kraft ist die Derivirte des Potentials nach der Verschiebung auf dieser Normalen, d. h.* $P = \frac{d\varphi}{dn}$.

Die Derivirte des Potentials φ nach irgend einer anderen Verschiebung ds giebt die Projection der Kraft P auf die Richtung dieser Verschiebung, d. h. $\frac{d\varphi}{ds} = P\cos(P, ds)$.

Ist der Ausdruck des Potentials φ als Function der Coordinaten q_1, q_2, q_3 des Angriffspunktes bekannt, so kann man (nach Kinem. Cap. XII) vermittelst der partiellen Derivirten

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \quad \varphi_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}$$

die Componenten der Kraft P nach den Richtungen der Coordinatenparameter h_1, h_2, h_3 finden und mit Hilfe dieser Componenten die Grösse und Richtung der Kraft P bestimmen. Diese Componenten sind $h_1\varphi_1, h_2\varphi_2, h_3\varphi_3$ und die Grösse der Kraft ist:

$$P = [\tfrac{1}{2}\,\Sigma \overline{h_r h_s} \varphi_r \varphi_s]^{\frac{1}{2}}.$$

20. *Haben mehrere in demselben Punkte angreifende Kräfte Potentiale, so hat ihre Resultante als Potential die Summe der Potentiale aller Componenten.*

Es seien $\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}''$, die an demselben Punkte angreifenden Kräfte, $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ ihre Potentiale und $\overline{P}$ ihre Resultante. Da nun

$$\overline{P} = \overline{F} + \overline{F}' + \overline{F}'' + \cdots$$

ist, so ist (nach § 52 der Kinematik) die Resultante $\overline{P}$ der Differentialparameter erster Ordnung der Function

$$U = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \cdots;$$

mithin ist U das Potential der Kraft $\overline{P}$.

21. Wenn die Kraft P, mit der zwei materielle Punkte m und m' auf einander wirken, längs der geraden Verbindungslinie von m und m' gerichtet und eine Function ihres Abstandes ist, so hat sie ein Potential, das ebenfalls eine Function dieses Abstandes ist. Man kann eine solche Kraft durch $mm'f(r)$ darstellen, worin m und m' die Massen der beiden Punkte bedeuten, während r ihr Abstand ist. Bezeichnet man mit $F(r)$ einen speciellen Werth des Integrals $\int f(r)dr$, so hat man $f(r) = \frac{dF}{dr}$ und folglich:

$$mm'f(r) = mm'\frac{dF}{dr} = \frac{d[mm'F(r)]}{dr}.$$

Nimmt man an, der Punkt m' sei fest und dr sei die Verschiebung des Punktes m auf der Richtung r, im Sinne von m' nach m genommen, so ist $\frac{d[mm'F(r)]}{dr}$ der Differentialparameter erster Ordnung der Function $mm'F(r)$, die dabei als Function des Punktes m allein betrachtet wird. Dann ist die Niveaufläche eine Kugel vom Radius r und vom Centrum m'; folglich hat der Parameter die Richtung von r, und zwar hat man, wenn $mm'f(r)$ als positiv vorausgesetzt wird, diese Richtung im Sinne $\Delta r > 0$ zu nehmen. Man sieht hieraus, dass die Function $mm'F(r)$ das Potential der Kraft $mm'f(r)$ ist, mit welcher der Punkt m' den Punkt m abstösst. Dieselbe Function, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, d. h. $-mm'F(r)$, ist das Potential der von m nach m' gerichteten Kraft $mm'f(r)$,

d. h. der Kraft, mit welcher der Punkt m' den Punkt m anzieht. Also ist allgemein

$$\varphi = \pm mm'F(r)$$

das Potential der Kraft der Wirkung von m' auf m. Man kann aber auch φ als Function des Punktes m' ansehen; dann ist es das Potential der Kraft-Wirkung von m auf m'; betrachtet man also φ als eine Function beider Punkte m und m', so kann man es das gemeinsame Potential der Kräfte der gegenseitigen Wirkung dieser Punkte auf einander nennen. Im Falle abstossender Kräfte hat man in dem Ausdruck $\varphi = \pm mm'F(r)$ das positive, im Falle anziehender Kräfte das negative Zeichen zu wählen.

Die Function $f(r)$ in dem Ausdruck für die Grösse der Kraft $mm'f(r)$ bestimmt das Gesetz der gegenseitigen Wirkung der Massen m und m'. Für Gewichtsmassen m und m' in endlicher Entfernung von einander und auch für elektrische und magnetische Massen ist diese Function $f(r) = \frac{\mu}{r^2}$, worin μ eine gewisse constante Grösse bezeichnet, die man als diejenige Kraft auffassen kann, welche zwischen zwei Punkten, deren Massen gleich der Einheit und deren Abstand gleich Eins ist, wirkt. Dieses Gesetz der gegenseitigen Wirkung zweier materiellen Punkte nennt man das Newton'sche *Gesetz*.

Setzt man $f(r) = \frac{\mu}{r^2}$, so hat man $F(r) = \int \frac{\mu dr}{r^2} = -\frac{\mu}{r}$; folglich ist in diesem Falle

$$\varphi = \mp \frac{mm'\mu}{r},$$

d. h. *das Potential der Kraft, mit welcher sich zwei Punkte nach dem* Newton'schen *Gesetze anziehen oder abstossen, ist der ersten Potenz des Abstandes der Punkte umgekehrt proportional.*

Bei der Wirkung wägbarer materieller Punkte auf einander in unmessbar kleinen Entfernungen ändert sich die das Wirkungsgesetz ausdrückende Function $f(r)$ schneller als das Quadrat dieses Abstandes.

22. Sind die Kräfte, mit welchen irgend welche materielle Punkte auf einen materiellen Punkt M wirken, Functionen der Entfernungen allein und längs diesen Entfernungen ge-

richtet, so hat ihre Resultante (s. § 20) ein Potential, mit Hilfe dessen man jene Resultante bestimmen kann. Wir wollen nun das Potential der Resultante der Kräfte, mit welchen die Elemente einer continuirlichen Masse m auf einen gegebenen Punkt M wirken, zu bestimmen suchen.

Die Masse m kann über eine Linie, eine Fläche oder ein Volumen vertheilt sein. Man denkt sie sich zerlegt in Differentialelemente dm, deren Dimensionen alle unendlich klein sind und bezeichnet den Abstand eines Elementes dm vom Punkte M mit r und die Kraft, mit der dm auf M wirkt, mit $f(r)dm$, indem man der Einfachheit halber die Masse des Punktes M als Einheit nimmt. Das Potential dieser Kraft ist dann $\pm F(r)dm$, wenn $F(r) = \int f(r)dm$ ist; das Potential U der Resultante P aller Kräfte, die die Elemente dm auf M ausüben, ist (nach § 20) ausgedrückt durch das Integral

$$U = \int \pm F(r)\, dm\,, \tag{1}$$

welches über die ganze Masse m auszudehnen ist. Führt man die Integration aus, so erhält man eine Function des Punktes M, für die man nach den Regeln der Cap. VII und XII der Kinematik den Differentialparameter erster Ordnung bestimmen kann; dieser Parameter ist die gesuchte Resultante P. In der Formel (1) hat man das Zeichen $+$ unter dem Integralzeichen zu wählen, wenn alle Elementarkräfte abstossend wirken, dagegen $-$, wenn sie alle anziehend wirken. Wenn aber einige der Elemente den Punkt M abstossen, andere ihn anziehen, so hat man für die ersteren das Zeichen $+$, für die anderen das Zeichen $-$ zu nehmen. Der Einfachheit halber kann man diese Zeichen zu dm ziehen, indem man positive und negative Massenelemente unterscheidet; oder man kann die Masse m in zwei Theile m' und m'' derart zerlegen, dass der eine m' nur abstossende Elemente enthält und der andere m'' nur anziehende, dann die Integrale

$$U' = \int F(r)\, dm' \quad \text{und} \quad U'' = \int F(r)\, dm''$$

einzeln berechnen und die Differenz $U = U' - U''$ bilden; dieselbe ist das Potential der Resultante aller anziehenden und abstossenden Kräfte.

23. Gesetzt, das Element dm wirke nach dem Newton'-

schen Gesetze auf den Punkt M. In diesem Falle ist $f(r) = \frac{\mu}{r^2}$, wo μ eine Constante bedeutet, die man als diejenige Kraft ansehen kann, welche zwischen zwei Punkten von Massen gleich der Masseneinheit in einem Abstande gleich der Längeneinheit wirkt. Der Einfachheit halber setzen wir $\mu = 1$, indem wir uns vorbehalten, diesen Factor später, wenn nöthig, wieder einzuführen. Setzt man also $f(r) = \frac{1}{r^2}$, so wird $F(r) = -\frac{1}{r}$ und die Formel (1) giebt:

$$U = \int \mp \frac{dm}{r};$$

d. h. *das Potential der Resultante der Attractionskräfte, die von der Einwirkung einer continuirlichen Masse auf einen gegebenen Punkt herrühren, ist das Integral der Elemente dieser Masse, jedes Element getheilt durch seinen Abstand von dem angezogenen Punkte. Dieselbe Grösse, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen, ist das Potential der Resultante der abstossenden Kräfte, die von der Einwirkung derselben Masse auf denselben Punkt herrühren.*

Auf Grund der Betrachtungen im vorigen § kann man sich auf die Untersuchung des Potentials der Attractionskräfte

$$U = \int \frac{dm}{r} \tag{2}$$

beschränken.

24. Betrachten wir zunächst die Eigenschaften und die Berechnungsmethoden der Resultante der nach dem Newton'schen Gesetze wirkenden Attractionskräfte und ihres Potentials für den Fall, dass die Masse m über ein von allen Seiten begrenztes Volumen V vertheilt ist; dabei sei vorausgesetzt, dass die Dichtigkeit ϱ dieser Masse m in jedem Punkte des Volumens einen endlichen Werth habe. Dann haben das Potential U und die Resultante $\overline{P}$ in jedem Punkte M bestimmte endliche Werthe, die sich bei continuirlicher Aenderung der Lage des Punktes M continuirlich ändern. Dabei sind U und P immer eindeutige Functionen des Punktes M, und P ist immer der Differentialparameter erster Ordnung der Function U oder des Integrals (2).

Bei der Untersuchung von U und $\overline{P}$ hat man zwei Fälle

zu unterscheiden: 1) den Fall, dass der angezogene Punkt M ausserhalb der Masse m und 2) den Fall, dass er innerhalb oder auf der Oberfläche der Masse m liegt. Der zweite Fall hat nur für die elektrischen und magnetischen Kräfte eine reelle Bedeutung; für die gewöhnlichen Schwerkräfte existirt er in Wirklichkeit nicht; denn die Anziehung materieller Punkte, deren Abstand unendlich klein ist, folgt nicht mehr dem Newton'schen Gesetze.

25. Wählen wir nun den Punkt M als Pol und bestimmen wir die Lage des Elementes dm durch Polarcoordinaten, nämlich den Radiusvector $(M, dm) = r$, den Winkel φ, den die Richtung von r mit einer festen Axe bildet und den Winkel ψ, den die Ebene des Winkels φ mit einer festen, durch die Axe gehenden Ebene bildet. In diesem Falle ist $dm = \varrho r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\psi$, und die Formel (2) giebt für das Potential den Ausdruck

$$U = \int \varrho r \sin\varphi dr d\varphi d\psi, \tag{3}$$

der zur Untersuchung der Eigenschaften des Potentials und zur Berechnung desselben in speciellen Fällen geeignet ist. Hierin ist $\sin\varphi d\varphi d\psi$ das Element einer Kugelfläche σ vom Radius 1, deren Centrum in M ist. Setzt man also $\sin\varphi d\varphi d\psi = d\sigma$, so folgt:

$$U = \int \varrho r dr d\sigma. \tag{4}$$

Man kann jetzt zuerst nach r längs einer beliebigen Richtung r integriren und dann nach $d\sigma$, wobei man die Integration über denjenigen Theil σ der Kugeloberfläche auszudehnen hat, der die Schnittpunkte dieser Kugelfläche mit sämmtlichen Radienvectoren enthält.

Bei jeder Lage des Punktes M, gleichviel ob ausserhalb oder innerhalb der Masse m, hat das Integral (4) einen bestimmten Werth und kann nicht grösser werden als eine gewisse endliche Grösse, die man in folgender Weise leicht bestimmen kann.

Es sei k der Maximalwerth der Dichtigkeit ϱ und R der Maximalwerth des Radiusvectors r; substituirt man in dem Ausdruck (4) k für ϱ und nimmt 0 und R als Grenzen des Integrals nach r, so erhält man

$$\int d\sigma \int \varrho r dr < \int d\sigma \,.\, k \int_0^R r dr,$$

also:

$$U < \tfrac{1}{2} k \sigma R^2.$$

Man sieht hieraus, dass U einen endlichen Werth hat, wenn der Punkt M in endlicher Entfernung von jedem Elemente dm liegt, wozu erforderlich ist, dass das Volumen V keine unendliche Dimension habe.

Wenn alle Dimensionen des Volumens der Masse m unendlich klein sind und der Punkt M ausserhalb der Masse m in endlicher Entfernung von ihr liegt, so ist die Grösse σ unendlich klein; liegt dagegen der Punkt M innerhalb m, oder ausserhalb, aber in unendlich kleiner Entfernuug von m, so ist die Grösse R unendlich klein. Mithin hat das Potential U jedenfalls bei unendlich kleinen Dimensionen des Volumens der Masse m einen unendlich kleinen Werth.

Setzen wir nun voraus, die Masse m habe endliche Dimensionen und der Punkt M befinde sich innerhalb m und bezeichnen wir mit μ einen den Punkt M enthaltenden Theil der Masse m von drei unendlich kleinen Dimensionen. Da der auf μ bezügliche Theil des Potentials U unendlich klein ist, so nähert sich der übrige, auf die Masse $m - \mu$ bezügliche Theil dem Werthe U, wenn die Dimensionen von μ sich der Null nähern. Folglich hat die Anziehung des Punktes M durch die ihm benachbarten Punkte keinen merklichen Einfluss auf die Grösse des ganzen Potentials U.

26. Wir werden nun direct beweisen, dass das Integral (2) für jede Lage des Punktes M ausserhalb oder innerhalb der Masse m bei einer unendlich kleinen Verschiebung MM' dieses Punktes ein unendlich kleines Increment erhält, dessen Verhältniss zu der Verschiebung MM' nicht unendlich gross sein kann, und dass die Grenze, der sich dieses Verhältniss nähert, wenn MM' gegen Null convergirt, d. h. die Derivirte $\frac{dU}{ds}$ bezüglich einer beliebigen Differentialverschiebung ds, immer gleich der Projection der Resultante $\overline{P}$ auf diese Verschiebung ist.

Infolge der Verschiebung MM' (Fig. 26) geht jeder Abstand r in einen anderen r' über; dadurch erhält U das Increment

Fig. 26.

$$\Delta U = \int \frac{dm}{r'} - \int \frac{dm}{r} = \int \frac{r - r'}{rr'} dm;$$

folglich ist

$$\frac{\Delta U}{MM'} = \int \frac{r - r'}{MM'} \frac{dm}{rr'}.$$

Bestimmt man die Lage des Elements dm durch die Polarcoordinaten r, φ, ψ, indem man den Punkt M als Pol und die Richtung MM' als Polaraxe wählt, so hat man $dm = \varrho r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\psi$; mithin wird:

$$\frac{\Delta U}{MM'} = \int \frac{r - r'}{MM'} \cdot \frac{r \sin\varphi}{r'} \varrho dr d\varphi d\psi. \qquad (a)$$

In dem Dreiecke, dessen Ecken M, M' und dm sind, kann die Differenz zweier Seiten $r - r'$ oder $r' - r$ nicht grösser als die dritte Seite MM' und das Perpendikel $r \sin\varphi$ aus dem Eckpunkt dm auf die gegenüberliegende Seite MM' nicht grösser als die Seite r' sein. Daher können die Absolutwerthe der Verhältnisse

$$\frac{r - r'}{MM'} \text{ und } \frac{r \sin\varphi}{r'}$$

nicht grösser als Eins sein, sogar in dem Fall $r = 0$ oder $r' = 0$. Deshalb hat das Integral (a) immer einen endlichen bestimmten Werth; folglich ist ΔU ebensowohl wie MM' eine unendlich kleine Grösse. Bezeichnet nun φ' den Winkel, den die im Sinne von M' nach dm gerechnete Richtung von r' mit MM' bildet, so hat man:

$$\frac{r - r'}{MM'} = \frac{\sin\varphi' - \sin\varphi}{\sin(\varphi' - \varphi)} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)}$$

und

$$\frac{r \sin\varphi}{r'} = \sin\varphi'.$$

Daher lässt sich die Formel (a) schreiben

$$\frac{\Delta U}{MM'} = \int \frac{\cos\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) \sin\varphi'}{\cos\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)} \varrho dr d\varphi d\psi,$$

woraus für $MM' = 0$ folgt:

$$\frac{dU}{ds} = \int \lim \frac{\cos\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) \sin\varphi'}{\cos\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)} \varrho dr d\varphi d\psi. \qquad (b)$$

Es erübrigt noch, den Werth von

$$\lim \frac{\cos\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) \sin\varphi'}{\cos\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)} \qquad (c)$$

für jedes Element dm zu bestimmen. Ist r nicht gleich Null, so fällt für $MM' = 0$ die Richtung von r' mit der von r zusammen, so dass $\varphi' = \varphi$ wird und (c) den Werth $\cos\varphi \sin\varphi$ annimmt. Ist aber $r = 0$, so ist $r' = M'M$ und $\varphi' = \pi$; dadurch geht die Grösse (c) in Null über, folglich hat das dem Werthe $r = 0$ entsprechende Element des Integrals auf den Werth des ganzen Integrals keinen Einfluss. Da für alle anderen Elemente die Grösse (c) sich auf $\cos\varphi \sin\varphi$ reducirt, so ist in jedem Falle

$$\frac{dU}{ds} = \int \cos\varphi \sin\varphi \varrho dr d\varphi d\psi,$$

oder wenn man $\cos\varphi = \cos(r, ds)$ und $\sin\varphi d\varphi d\psi = d\sigma$ setzt,

$$\frac{dU}{ds} = \int \varrho \cos(r, ds) dr d\sigma, \qquad (5)$$

wo die Grenzen der Integration dieselben wie in Formel (4) sind. Die Kraft, mit welcher das Element dm den Punkt M anzieht, ist $\frac{dm}{r^2}$, also ihre Projection auf ds:

$$\frac{dm}{r^2} \cos(r, ds) = \varrho \cos(r, ds) dr d\sigma;$$

daher repräsentirt das Integral (5) die Summe der Projectionen aller derjenigen Kräfte auf ds, mit denen die Elemente der Masse m den Punkt M anziehen. Diese Summe muss aber auch der Projection der Resultante $\overline{P}$ auf ds gleich sein. Folglich ist:

$$\frac{dU}{ds} = \bar{P} \cos(P, ds). \qquad (6)$$

Es kann vorkommen, dass $\frac{dU}{ds} = 0$ ist für jede Richtung ds; dann ist auch $P = 0$, d. h. die Kräfte, mit welchen die Elemente der Masse m den Punkt M anziehen, sind im Gleichgewicht.

Wenn umgekehrt $P = 0$ ist, so ist für jede Richtung ds auch $\frac{dU}{ds} = 0$. Solcher Gleichgewichtslagen kann es für den Punkt M mehrere und sogar unendlich viele geben, wie wir später sehen werden. Ist aber $\frac{dU}{ds}$ nicht für jedes ds gleich Null, so ist auch P nicht gleich Null. Kennt man dann $\frac{dU}{ds}$ für drei nicht in einer Ebene liegende Richtungen, so kann man die Grösse und Richtung von P bestimmen. Ueberhaupt zeigt die Formel (6), dass P der Differentialparameter der Function $U = \int \frac{dm}{r}$ ist, gleichviel ob der Punkt M ausserhalb oder innerhalb der Masse m liegt.

Bezeichnet man wieder mit k den Maximalwerth von ϱ und mit R den Maximalwerth von r, so findet man, dass der Absolutwerth des Integrals (5) nicht grösser als $kR\sigma$ sein kann; hieraus folgt aber, dass $\frac{dU}{ds} = P \cos(P, ds)$ und P, ebensowohl wie U, bei endlichen Dimensionen der Masse m und endlichem Abstande des angezogenen Punktes M von ihr endliche Werthe haben, dass sie dagegen bei unendlich kleinen Dimensionen der Masse m immer unendlich klein sind, wo der Punkt M auch liegen mag.

27. Untersuchen wir nun die Werthe des Potentials U und der Attractionskraft P in dem Falle, wenn der angezogene Punkt M unendlich weit von m entfernt ist. Es lassen sich folgende Eigenschaften des Potentials und der Kraft beweisen:

Das Potential U und die Kraft P sind unendlich klein, wenn der Punkt M von den Punkten einer Masse m, welche eine endliche Grösse und endliche Dimensionen hat, unendlich weit entfernt ist. Bezeichnet man mit δ den Abstand des Punktes M von einem beliebigen Punkte O, der in dem Volumen der Masse m oder ausserhalb in endlicher Entfernung von derselben

liegt, so sind die Producte $U\delta$ *und* $P\delta^2$ *für* $\delta = \infty$ *gleich der Masse* m*;* U *und* P *werden daher bei unendlich grossem* δ *unendlich klein von derselben Ordnung wie* $\frac{m}{\delta}$, *resp.* $\frac{m}{\delta^2}$*; dabei nähert sich die Richtung von* P *der Richtung* δ.

Beweis. Bezeichnet u den Abstand des Punktes O von dem Elemente dm, so sieht man leicht, dass bei hinreichend grossem Werthe von δ die Bedingung

$$r - u < \delta < r + u \tag{a}$$

erfüllt ist, woraus folgt:

$$\int \frac{(r-u)\,dm}{r} < \int \frac{\delta\,dm}{r} < \int \frac{(r+u)\,dm}{r},$$

d. h.

$$m - \int \frac{u\,dm}{r} < U\delta < m + \int \frac{u\,dm}{r}.$$

Man kann hierin, ohne die Beziehungen der Ungleichheit zu stören, statt des variablen Werthes u dessen Maximalwerth u_1 und ebenso statt des variablen Werthes r dessen Minimalwerth r_1 einsetzen. Dadurch erhält man aber:

$$m\left(1 - \frac{u_1}{r_1}\right) < U\delta < m\left(1 + \frac{u_1}{r_1}\right).$$

Da für ein unendlich grosses δ die Grösse $\frac{u_1}{r_1}$ unendlich klein wird, so nähern sich die Grenzen, zwischen denen $U\delta$ eingeschlossen ist, bei unendlich wachsendem δ dem Werthe m, d. h. $U\delta$ convergirt gegen m.

Die Projection der Kraft P auf δ ist durch das Integral $\int \frac{\cos(r\delta)\,dm}{r^2}$ ausgedrückt; daher ist:

$$\delta^2 P \cos(P\delta) = \int \frac{\delta^2 \cos(r\delta)}{r^2}\,dm.$$

Da $\delta \cos(\delta r) = r - u \cos(ur)$ ist und $u \cos(ur)$ zwischen $-u$ und $+u$ liegt, so ist

$$r - u < \delta \cos(\delta r) < r + u,$$

und dies giebt in Verbindung mit (a)

$$(r-u)^2 < \delta^2 \cos(\delta r) < (r+u)^2;$$

hieraus folgt

$$\left(1-\frac{u_1}{r_1}\right)^2 < \frac{\delta^2 \cos(\delta r)}{r^2} < \left(1+\frac{u_1}{r_1}\right)^2$$

und folglich:

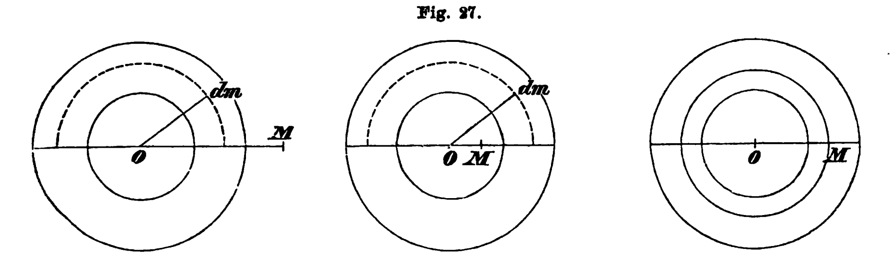
$$m\left(1-\frac{u_1}{r_1}\right)^2 < \delta^2 P \cos(P\delta) < m\left(1+\frac{u_1}{r_1}\right)^2.$$

Man sieht hieraus, dass m die Grenze ist, der sich $\delta^2 P \cos(P\delta)$ nähert, wenn sich der Punkt M unendlich weit von O entfernt. Da hierbei alle Winkel $(r\delta)$ sich der Null nähern, d. h. da alle Kräfte, die die Resultante P bilden, bei unendlich grossem δ unendlich kleine Winkel mit der Richtung δ bilden, so bildet auch ihre geometrische Summe P mit der Richtung von δ einen unendlich kleinen Winkel. Mithin nähert sich die Richtung von P der Richtung δ und das Verhältniss $\delta^2 P \cos(P\delta) : \delta^2 P$ der Einheit. Da aber, wie soeben bewiesen, m die Grenze von $\delta^2 P \cos(P\delta)$ ist, so ist m auch die Grenze von $\delta^2 P$. Die Grössen U und P werden also bei unendlich grossem δ unendlich klein von derselben Ordnung wie $\frac{m}{\delta}$ und $\frac{m}{\delta^2}$.

Beispiele für die Berechnung des Potentials und der Attractionskraft vermittelst einer über die anziehende Masse ausgedehnten Integration.

28. *Anziehung eines Punktes durch eine von zwei concentrischen Kugelflächen eingeschlossene Kugelschicht, deren Dichtigkeit entweder constant oder eine Function des Abstandes vom Centrum allein ist* (Fig. 27).

Fig. 27.



Gesetzt, die zwischen den beiden concentrischen Kugeln vom Centrum O und von den Radien R und R' eingeschlossene Masse m ziehe den Punkt M an, dessen Abstand OM vom

Centrum O gleich α ist; es sei $R' < R$ und die Dichtigkeit ϱ des Elements dm constant oder eine Function des aus O nach dm gezogenen Radiusvectors u allein. Bedeutet nun φ den Winkel, welchen dieser Radiusvector mit der Richtung OM bildet, und ψ den Winkel, den die Ebene des Winkels φ mit einer festen, durch OM gehenden Ebene einschliesst, so hat man

$$dm = \varrho u^2 \sin\varphi du d\varphi d\psi;$$

folglich ist

$$U = \int \frac{\varrho u^2 \sin\varphi du d\varphi d\psi}{r},$$

wo r den Abstand des Elements dm vom Punkte M bezeichnet, der als Function von φ und u durch die Formel

$$r = (u^2 + \alpha^2 - 2\alpha u \cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben ist. Die Integration lässt sich nun in folgender Ordnung ausführen: 1) nach φ von 0 bis π, 2) nach ψ von 0 bis 2π, 3) nach u von R' bis R.

Integrirt man nach φ, so folgt:

$$\int \frac{\sin\varphi d\varphi}{(u^2 + \alpha^2 - 2u\alpha\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\alpha u}(u^2 + \alpha^2 - 2u\alpha\cos\varphi)^{\frac{1}{2}} = \frac{r}{\alpha u}.$$

Setzt man hierin für φ die Grenzen 0 und π ein, so hat man drei Fälle zu unterscheiden: a) wenn der Punkt M ausserhalb der Masse m in dem die Kugelschicht umgebenden Raume liegt, b) wenn M innerhalb der Höhlung der Kugelschicht, d. h. in der Kugel vom Radius R' liegt, und c) wenn M in der Masse m liegt.

a) Im ersten Falle entsprechen den Grenzwerthen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ die Werthe $r = \alpha - u$ und $r = \alpha + u$; daher ist das Resultat der Integration nach φ

$$\frac{1}{\alpha u}\Big|_{\alpha-u}^{\alpha+u} r = \frac{2}{\alpha};$$

folglich ist:

$$U = \frac{1}{\alpha}\int 2\varrho u^2 du d\psi.$$

Führt man nun die Integration nach ψ aus, so ergiebt sich:

$$U = \frac{1}{\alpha}\int 4\pi\varrho u^2 du.$$

Es wäre nun noch die Integration nach u auszuführen, wobei ϱ als constant oder als eine Function von u vorausgesetzt wird. Man sieht aber leicht, dass $4\pi u^2 du$ der Differentialausdruck des Volumens einer unendlich dünnen Schicht ist, die zwischen zwei Kugeln vom Radius u und $u + du$ eingeschlossen ist. Daher ist $4\pi\varrho u^2 du$ die Masse dieser Schicht, also $\int_{R'}^{R} 4\pi\varrho u^2 du$ die ganze Masse m. Man hat also

$$U = \frac{m}{\alpha}, \tag{a}$$

d. h. *das Potential der Anziehung, die eine Kugelschicht auf einen in dem äusseren umgebenden Raume befindlichen Punkt ausübt, ist gleich der Masse der Schicht, dividirt durch den Abstand des angezogenen Punktes vom Centrum der Schicht.*

Die Niveaufläche (U) ist diejenige Fläche, für deren Punkte α einen constanten Werth hat; sie ist daher eine Kugel, deren Centrum O und deren Radius OM ist. Der Differentialparameter der Function (a), der die Attractionskraft P darstellt, ist

$$P = \frac{m}{\alpha^2}$$

und längs MO in dem Sinne gerichtet, in welchem der Punkt M verschoben werden muss, wenn $\frac{m}{\alpha}$ zunehmen soll. Diese Function wächst aber bei abnehmendem α, d. h. wenn man M in der Richtung von M nach O verschiebt; folglich ist die Attractionskraft längs MO im Sinne von M nach O gerichtet. Man kann daher sagen, dass *eine von zwei concentrischen Kugeln eingeschlossene Schicht, deren Dichtigkeit entweder constant oder eine Function des Abstandes vom Centrum allein ist, einen in dem die Schicht umgebenden Raume befindlichen Punkt ebenso anzieht, wie ein einzelner im Centrum der Schicht liegender Punkt, dessen Masse gleich der Masse der ganzen Schicht ist.*

b) Liegt der Punkt M in der Höhlung der Schicht, so entsprechen den Grenzwerthen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ die Werthe $r = u - \alpha$ und $r = \alpha + u$; daher giebt die Integration nach φ:

$$\frac{1}{\alpha u}\Big|_{u-\alpha}^{\alpha+u} r = \frac{1}{\alpha u}[\alpha + u - (u - \alpha)] = \frac{2}{u};$$

folglich ist:

$$U = 2\int \varrho u du d\psi = 4\pi \int_{R'}^{R} \varrho u du. \qquad (b)$$

Diese Grösse ist von α, d. h. von dem Orte des Punktes M in der Höhlung der Schicht, nicht abhängig; folglich hat U für alle Punkte dieses Raumes denselben Werth, so dass der Differentialparameter P gleich Null ist. Hieraus schliesst man, dass *alle die Kräfte, mit welchen die Elemente der Schicht einen in der Höhlung der Schicht gelegenen Punkt anziehen, im Gleichgewicht sind.*

c) Wenn der Punkt M innerhalb der Masse m liegt, so sind die Werthe von r, die den Werthen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ entsprechen, die folgenden:

$$r = u - \alpha \quad \text{und} \quad r = u + \alpha \quad \text{für} \quad u > \alpha,$$
$$r = \alpha - u \quad \text{und} \quad r = u + \alpha \quad \text{für} \quad u < \alpha.$$

Daher liefert die Integration nach φ im ersten Falle das Resultat $\frac{2}{\alpha}$, im zweiten aber das Resultat $\frac{2}{u}$. Zerlegt man also die Masse m in zwei Theile m' und m'' durch eine Kugel, deren Centrum O und deren Radius $OM = \alpha$ ist, so dass m' im Inneren dieser Kugel liegt, so ist der der Masse m' entsprechende Theil des Potentials U, wie im Falle a), durch das Integral

$$\frac{1}{\alpha}\int_{R'}^{\alpha} 4\pi \varrho u^2 du$$

ausgedrückt; dagegen gilt für den der Masse m'' entsprechenden Theil, ebenso wie im Falle b), das Integral

$$4\pi \int_{\alpha}^{R} \varrho u du;$$

folglich ist:

$$U = \frac{1}{\alpha}\int_{R'}^{\alpha} 4\pi \varrho u^2 du + 4\pi \int_{\alpha}^{R} \varrho u du;$$

hieraus erhält man:

$$\frac{dU}{d\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}\int_{R'}^{\alpha} 4\pi \varrho u^2 du + \frac{1}{\alpha}\, 4\pi \varrho_\alpha \alpha^2 - 4\pi \varrho_\alpha \alpha = -\frac{m'}{\alpha^2},$$

wo ϱ_α der Werth von ϱ für $u=\alpha$ ist; daher ist $P=-\frac{dU}{d\alpha}=\frac{m'}{\alpha^2}$. Die Richtung von P ist die Richtung MO im Sinne von M nach O. Dies zeigt, dass *die Attraction nur von der Einwirkung der Elemente der Masse m' auf den Punkt M herrührt, während die Kräfte der Elemente der Masse m'' im Gleichgewicht sind.*

Für eine Vollkugel hat man in den vorhergehenden Formeln $R'=0$ zu setzen. Ist dabei die Masse homogen, so ist $m=\frac{4}{3}\pi\varrho R^3$ und $P=\frac{4\pi\varrho R^3}{3\alpha^2}$ für den Fall a), d. h. wenn M ausserhalb der Kugel liegt. Im Falle c) dagegen hat man $m'=\frac{4}{3}\pi\varrho\alpha^3$ und $P=\frac{4}{3}\pi\varrho\alpha$, d. h. eine homogene Vollkugel zieht einen inneren Punkt proportional dem Abstand des Punktes vom Centrum an.

29. Die Gesetze der Anziehung eines Punktes durch homogene Kugeln und Kugelschichten sind von Newton gefunden worden.*) Er hat auch einige specielle Fälle der Anziehung eines Punktes durch homogene Ellipsoide betrachtet und unter anderem den folgenden Satz bewiesen: Eine homogene, von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden eingeschlossene Schicht übt auf einen in der Höhlung befindlichen Punkt *keine Wirkung aus.***)

Es seien nämlich S und S' zwei concentrische, ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsoide, die eine homogene Masse m von der Dichtigkeit ϱ begrenzen; S' sei das innere, S das äussere Ellipsoid. Es ist nun zu beweisen, dass alle Kräfte, mit denen die Elemente jener Masse einen innerhalb oder auf der Oberfläche des Ellipsoids S befindlichen Punkt M anziehen, sich Gleichgewicht halten. Man denke sich um M als Centrum mit einem Radius gleich Eins eine Kugel beschrieben und ziehe von M aus durch ein beliebiges Element $d\sigma$ der Oberfläche dieser Kugel einen Radiusvector r bis zu einem beliebigen Elemente dm der Masse m. Nach Formel (5) ist die

*) Philosophiae nat. principia math., lib. I, sectio XII: De corporum sphaericorum viribus attractivis (ed. Le Seur 1760, p. 465).

**) Ib. lib. I, sectio XIII: De corporum non sphaericorum viribus attractivis, prop. XCI, probl. XLV (ed. Le Seur 1760, p. 511—520).

Projection der Resultante P aller Attractionskräfte auf eine beliebige Axe Mx durch das Integral

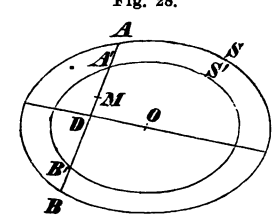
$$P \cos (Px) = \varrho \int \cos (rx) dr\, d\sigma$$

ausgedrückt. Gesetzt, die Gerade, auf welcher der Radiusvector r liegt, treffe das Ellipsoid S in den Punkten A und B und das Ellipsoid S' in A' und B' (s. Fig. 28). Integrirt man nun nach r, so wird

$$P \cos (Px) = \varrho \int \cos (rx)(AA' - BB') d\sigma ,$$

wo die Integration nach $d\sigma$ über die Halbkugel zu erstrecken ist. Man sieht aber leicht, dass die Abschnitte AA' und BB' infolge der Aehnlichkeit und der ähnlichen Lage der Ellipsoide S und S' gleich sind;*) daher verschwinden sämmtliche Elemente des Integrals für jedes $d\sigma$; folglich ist $P \cos (Px) = 0$ für jede Richtung der Projectionsaxe Mx; dazu ist aber erforderlich, dass $P = 0$ sei.

Fig. 28.



30. *Anziehung eines Punktes durch ein homogenes Ellipsoid.*

Man denke sich ein volles homogenes Ellipsoid von der Dichtigkeit ϱ, dessen Oberfläche in Bezug auf die Axen die Gleichung habe:

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 1. \qquad (7)$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, das Potential U der Kraft P zu finden, mit der dieser Körper den Punkt $M(x, y, z)$ anzieht.

Setzt man

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = \Theta^2 , \qquad (8)$$

so ist dies die Gleichung einer der Fläche (7) ähnlichen und mit ihr ähnlich gelegenen Fläche. Giebt man also der Variablen Θ nach einander unendlich kleine Incremente $d\Theta$, so zerlegt man dadurch das Ellipsoid in unendlich dünne Schich-

*) Der zu der Sehne AB conjugirte Durchmesser OD der Ellipse AOB ist zugleich auch der der Sehne $A'B'$ conjugirte Durchmesser der Ellipse $A'OB'$; daher haben die Sehnen AB und $A'B'$ denselben Halbirungspunkt D, d. h. es ist $AD = BD$ und $A'D = B'D$; folglich ist $AA' = BB'$.

ten, so dass jede Schicht zwischen zwei ähnlichen Ellipsoiden (Θ) und ($\Theta + d\Theta$) enthalten ist. Das Potential der Anziehungskraft einer solchen Schicht ist dann das Differential des Potentials U bezüglich Θ, d. h. $d_\Theta U$. Suchen wir nun einen Ausdruck für dieses Differential zu finden.

Bezeichnet man mit dS ein Element der Fläche (8) von zwei unendlich kleinen Dimensionen, mit ε die Dicke der Schicht in einem der Punkte von dS und mit r den von dem gegebenen Punkte M nach diesem Punkte gezogenen Radiusvector, so ist

$$d_\Theta U = \varrho \int \frac{\varepsilon dS}{r}, \tag{9}$$

wo die Integration über die ganze Fläche (8) auszudehnen ist.

Um nun für dS und εdS einen zur Integration bequemen Ausdruck zu erhalten, wollen wir statt der geradlinigen Coordinaten ξ, η, ζ die Variablen

$$u = \frac{\xi}{\alpha}, \; v = \frac{\eta}{\beta}, \; w = \frac{\zeta}{\gamma} \tag{10}$$

einführen, die wir als geradlinige Coordinaten eines gewissen Punktes bezüglich derselben Coordinatenaxen betrachten. Irgend zwei Systeme entsprechender Punkte (ξ, η, ζ) und (u, v, w) repräsentiren homologe Figuren von der Eigenschaft, dass das Verhältniss entsprechender Volumina constant und gleich dem Producte $\alpha\beta\gamma$ ist. Denn es ist

$$\int d\xi d\eta d\zeta = \alpha\beta\gamma \int du dv dw.$$

Dem Ellipsoid (8) entspricht eine Kugel, deren Gleichung

$$u^2 + v^2 + w^2 = \Theta^2$$

ist. Dem Elemente dS der Oberfläche des Ellipsoids entspricht auf dieser Kugel ein Element, das man durch $\Theta^2 d\sigma$ ausdrücken kann, wenn man mit $d\sigma$ ein ihm ähnliches und ähnlich gelegenes Element auf einer Kugel vom Radius 1 bezeichnet. Daher entspricht dem Elemente εdS des Volumens der Ellipsoidschicht das Volumenelement $\Theta^2 d\Theta d\sigma$ einer Kugelschicht, die zwischen zwei Kugeln von den Radien Θ und $\Theta + d\Theta$ enthalten ist. Es ist also:

$$\varepsilon dS = \alpha\beta\gamma d\sigma \Theta^2 d\Theta. \tag{11}$$

Differentiirt man den Ausdruck (8) nach Θ und bezeichnet

mit p den Differentialparameter erster Ordnung der Function $\frac{1}{2}\Theta^2$ des Punktes (ξ, η, ζ), so hat man

$$\Theta d\Theta = p\varepsilon, \tag{12}$$

wo

$$p = \left(\frac{\xi^2}{\alpha^4} + \frac{\eta^2}{\beta^4} + \frac{\zeta^2}{\gamma^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist (s. Kinem. S. 112); p hat die Richtung der äusseren Normale des Ellipsoids (8) im Punkte (ξ, η, ζ).

Aus den beiden Gleichungen (11) und (12) ergiebt sich:

$$dS = \alpha\beta\gamma d\sigma\Theta p. \tag{13}$$

Substituirt man in (9) statt εdS den Ausdruck (11), so erhält man:

$$d_\Theta U = \varrho\alpha\beta\gamma\Theta^2 d\Theta \int \frac{d\sigma}{r}. \tag{14}$$

Nimmt man nun an, das Ellipsoid (7) sei mit einem anderen gegebenen Ellipsoide

$$\frac{\xi^2}{a_1} + \frac{\eta^2}{a_2} + \frac{\zeta^2}{a_3} = 1 \tag{15}$$

confocal, was sich durch die Bedingungen

$$\alpha^2 = a_1 + \lambda, \quad \beta^2 = a_2 + \lambda, \quad \gamma^2 = a_3 + \lambda \tag{16}$$

ausdrücken lässt, so wird $d_\Theta U$ eine Function der beiden unabhängigen Variablen Θ und λ. Man erhält diese Function, wenn man bezüglich $d\sigma$ integrirt; diese Integration bietet aber in dem Falle, dass der angezogene Punkt ein äusserer ist, Schwierigkeiten dar, die man folgendermassen vermeiden kann.

Man dividirt den Ausdruck (14) durch $\alpha\beta\gamma$ und differentiirt dann nach λ. Dadurch erhält man:

$$d_\lambda\left(\frac{d_\Theta U}{\alpha\beta\gamma}\right) = \varrho\Theta^2 d\Theta d_\lambda \int \frac{d\sigma}{r} = -\varrho\Theta^2 d\Theta \int \frac{d\sigma dr}{r^2}. \tag{17}$$

Aus der Formel

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

folgt:

$$rdr = (\xi - x)\, d\xi + (\eta - y) d\eta + (\zeta - z) d\zeta. \tag{18}$$

Bei der Differentiation nach λ sind die Grössen u, v, w und $d\sigma$ als Constante zu betrachten. Man hat daher auf Grund der Formeln (10) und (16):

$$d\xi = \frac{\xi}{2\alpha^2}\,d\lambda\,,\quad d\eta = \frac{\eta}{2\beta^2}\,d\lambda\,,\quad d\zeta = \frac{\zeta}{2\gamma^2}\,d\lambda.$$

Nun ist aber

$$\frac{\xi}{\alpha^2} = p\cos(px)\,,\quad \frac{\eta}{\beta^2} = p\cos(py)\,,\quad \frac{\zeta}{\gamma^2} = p\cos(pz)\,;$$

daher wird:

$$d\xi = \tfrac{1}{2}\,p\cos(px)d\lambda,\ d\eta = \tfrac{1}{2}\,p\cos(py)d\lambda,\ d\zeta = \tfrac{1}{2}\,p\cos(pz)d\lambda.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Formel (18) und dividirt durch r, so folgt:

$$dr = \tfrac{1}{2}\,p\cos(pr)d\lambda\,;$$

hiermit geht die Formel (17) über in:

$$d_\lambda\left(\frac{d\Theta U}{\alpha\beta\gamma}\right) = -\,\varrho\Theta^2 d\Theta\int\frac{p\,d\sigma\cos(pr)\,d\lambda}{2r^2}.$$

Eliminirt man hieraus $p\,d\sigma$ vermittelst der Formel (13), so findet man:

$$d_\lambda\left(\frac{d\Theta\,U}{\alpha\beta\gamma}\right) = -\,\frac{\varrho\,\Theta\,d\Theta\,d\lambda}{2\alpha\beta\gamma}\int\frac{\cos.(pr)\,dS}{r^2}. \tag{19}$$

Diese Formel liefert zwei verschiedene Resultate, je nachdem der Punkt $M\ (x,\ y,\ z)$ ausserhalb oder innerhalb des Ellipsoids (8) liegt. Im ersten Falle hat man nach dem in § 62 angeführten Satze von Gauss

$$\int\frac{\cos(pr)\,dS}{r^2} = 0,$$

und folglich

$$d_\lambda\left(\frac{d\Theta\,U}{\alpha\beta\gamma}\right) = 0. \tag{20}$$

Liegt der Punkt M ausserhalb des Ellipsoids (λ), so genügen seine Coordinaten der Bedingung

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} + \frac{z^2}{a_3+\lambda} \geqq 1\,; \tag{21}$$

in diesem Falle gilt die Formel (20) für jeden Werth von Θ, der zwischen 0 und 1 liegt. Nimmt man also das Integral nach Θ zwischen diesen Grenzen, so ergiebt sich

$$d_\lambda\left(\frac{\int_0^1 d\Theta\,U}{\alpha\beta\gamma}\right) = 0,$$

d. h.

$$d_\lambda\left(\frac{U}{\alpha\beta\gamma}\right) = 0, \tag{22}$$

da $\int_0^1 d_\Theta U = U$ ist.

Betrachtet man die Coordinaten x, y, z als constant und λ als die Variable, so hat man für diese Variable die Bedingung (21), wenn Gleichung (22) bestehen soll. Es sei λ_1 ein Werth von λ, der der Gleichung (21) genügt. Nimmt man das Integral der Gleichung (22) zwischen den Grenzen λ und λ_1 und bezeichnet man mit U_1, α_1, β_1, γ_1 die Werthe der Grössen U, α, β, γ für $\lambda = \lambda_1$, so hat man die Proportion

$$\frac{U}{\alpha\beta\gamma} = \frac{U_1}{\alpha_1\beta_1\gamma_1}, \tag{23}$$

welche zeigt, dass *die Potentiale der Attractionen, welche zwei confocale Ellipsoide auf denselben äusseren Punkt ausüben, den Producten der entsprechenden Halbaxen proportional sind, mithin auch den Volumina und Massen der Ellipsoide, da auch diese Grössen den Producten der Halbaxen proportional sind.*

Da bei constantem U auch der Werth von U_1 constant ist, so sind die Niveauflächen (U) und (U_1) der beiden Functionen dieselben. Daher fallen die Differentialparameter erster Ordnung P und P_1 der Functionen U und U_1 im Punkte M (x, y, z) in dieselbe Gerade; sie sind aber auch von demselben Sinne, da U und U_1 bei der Verschiebung des Punktes M gleichzeitig wachsen oder abnehmen. Das Verhältniss der Parameter P und P_1 ist gleich dem Verhältniss $\frac{U}{U_1}$, d. h.

$$\frac{P}{\alpha\beta\gamma} = \frac{P_1}{\alpha_1\beta_1\gamma_1},$$

denn, wenn man mit dn die Normalverschiebung des Punktes M gegen die Niveaufläche (U) oder (U_1) bezeichnet, so ist

$$\frac{\frac{dU}{dn}}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\frac{dU_1}{dn}}{\alpha_1\beta_1\gamma_1}.$$

Daher *fallen die Attractionskräfte, mit welchen zwei homogene confocale Ellipsoide einen beliebigen äusseren Punkt anziehen, in eine und dieselbe Gerade und sind den Massen der Ellipsoide proportional.*

Dieser Satz, den man den Maclaurin'schen Satz nennt, erlaubt, die Anziehung eines äusseren Punktes durch ein Ellipsoid zu berechnen, wenn die Anziehung desselben Punktes durch das dem ersten confocale Ellipsoid, auf dessen Oberfläche der Punkt liegt, bekannt ist.

Wir wollen nun zu dem Falle übergehen, dass der Punkt M innerhalb des Ellipsoids (8) liegt. Dann hat man nach dem in § 62 der Einleitung angeführten Satze von Gauss:

$$\int \frac{\cos(pr)\,dS}{r^2} = 4\pi;$$

daher geht die Formel (19) in die folgende über:

$$d_\lambda\left(\frac{d_\Theta U}{\alpha\beta\gamma}\right) = -\frac{2\pi\varrho\,\Theta\,d\Theta\,d\lambda}{\alpha\beta\gamma}. \tag{24}$$

Wählt man nun für λ einen Werth, der der Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} + \frac{z^2}{a_3+\lambda} \leqq 1$$

genügt und lässt Θ zwischen 0 und 1 variiren, so findet man zwischen diesen Grenzen für Θ einen Werth, der durch die Gleichung

$$\Theta_1^2 = \frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} + \frac{z^2}{a_3+\lambda} \tag{25}$$

bestimmt ist. Dieser Werth bestimmt eine dem Ellipsoid (7) ähnliche Fläche, die durch den gegebenen inneren Punkt $M(x, y, z)$ hindurchgeht.

Integrirt man $d_\lambda\left(\frac{d_\Theta U}{\alpha\beta\gamma}\right)$ von 0 bis 1 und beachtet die Gleichung (22), die für jeden Werth $\Theta < \Theta_1$ besteht, sowie die Gleichung (24), die für $\Theta > \Theta_1$ und < 1 gilt, so erhält man:

$$d_\lambda\left(\frac{U}{\alpha\beta\gamma}\right) = -\pi\varrho(1-\Theta_1^2)\frac{d\lambda}{\alpha\beta\gamma}.$$

Substituirt man hierin für Θ_1^2 seinen Werth aus (25) und integrirt dann bezüglich λ zwischen den Grenzen λ und $+\infty$, so findet man:

$$\left(\frac{U}{\alpha\beta\gamma}\right)_\infty - \left(\frac{U}{\alpha\beta\gamma}\right)_\lambda =$$

$$-\pi\varrho\int_\lambda^\infty\left(1-\frac{x^2}{a_1+\lambda}-\frac{y^2}{a_2+\lambda}-\frac{z^2}{a_3+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}. \tag{26}$$

Hierin ist $\left(\frac{U}{\alpha\beta\gamma}\right)_\infty$ der Werth von $\frac{U}{\alpha\beta\gamma}$ für $\lambda = \infty$. Derselbe ist gleich Null, weil das Product $\alpha\beta\gamma$ von höherer Ordnung unendlich gross wird als U. Bezeichnet man nämlich mit R den grössten von M nach der Oberfläche des Ellipsoids (λ) gezogenen Radiusvector, so hat man, wie im § 25 gezeigt wurde, $U < \frac{1}{2}\varrho\sigma R^2$, wo σ ein Theil einer Kugeloberfläche vom Radius 1 ist. Für $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$, $\gamma = \infty$ wird die Grösse R^2 unendlich gross von der 2. Ordnung; folglich kann auch U von keiner höheren Ordnung unendlich gross sein als von der zweiten. Daher geht die Gleichung (26) über in:

$$\left(\frac{U}{\alpha\beta\gamma}\right)_\lambda = \pi\varrho\int_\lambda^\infty\left(1-\frac{x^2}{a_1+\lambda}-\frac{y^2}{a_2+\lambda}-\frac{z^2}{a_3+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}. \quad (27)$$

Liegt der Punkt M innerhalb des Ellipsoids (15)

$$\frac{\xi^2}{a_1}+\frac{\eta^2}{a_2}+\frac{\zeta^2}{a_3}=1,$$

so kann man $\lambda = 0$ setzen. Dadurch erhält man aus Formel (27) den Werth des Potentials für dieses Ellipsoid, nämlich:

$$U = \pi\varrho\sqrt{a_1a_2a_3}\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a_1+\lambda}-\frac{y^2}{a_2+\lambda}-\frac{z^2}{a_3+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}. \quad (28)$$

Liegt aber der Punkt M ausserhalb des Ellipsoids (15), so kann man nach dem Maclaurin'schen Satz das Potential für dieses Ellipsoid mit Hilfe des Potentials U_1 eines confocalen Ellipsoids bestimmen, dessen Oberfläche durch den Punkt M geht. Bezeichnet man den entsprechenden Werth von λ mit λ_1, so hat man zur Bestimmung von λ_1 die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_1}+\frac{z^2}{a_3+\lambda_1}=1.$$

Dieser Werth λ_1 ist die grösste Wurzel der Gleichung dritten Grades

$$(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda) - x^2(a_2+\lambda)(a_3+\lambda) -$$
$$- y^2(a_3+\lambda)(a_1+\lambda) - z^2(a_1+\lambda)(a_2+\lambda) = 0;$$

dieselbe liegt zwischen ∞ und $-a_3$, wenn $a_1 > a_2 > a_3$ ist (s. Kinem. § 56).

Setzt man $a_1 + \lambda_1 = \alpha_1^2$, $a_2 + \lambda_1 = \beta_1^2$, $a_3 + \lambda_1 = \gamma_1^2$, so erhält man aus Formel (27)

$$\frac{U_1}{\alpha_1\beta_1\gamma_1} = \pi\varrho\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{a_1+\lambda} - \frac{y^2}{a_2+\lambda} - \frac{z^2}{a_3+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}};$$

die Formel (23) giebt aber:

$$\frac{U}{\sqrt{a_1 a_2 a_3}} = \frac{U_1}{\alpha_1\beta_1\gamma_1};$$

folglich ist:

$$U = \pi\varrho\sqrt{a_1 a_2 a_3}\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{a_1+\lambda} - \frac{y^2}{a_2+\lambda} - \frac{z^2}{a_3+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}. \quad (29)$$

31. Man sieht leicht ein, dass die Formeln (14), (20), (22) und (24) auch dann noch ihre Giltigkeit behalten, wenn die Dichtigkeit ϱ eine Function der variablen Grösse Θ^2 ist, d. h. wenn die Masse über jeder, der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids ähnlichen Fläche gleichförmig vertheilt ist, sich aber beim Uebergange von einer solchen Fläche zu einer anderen ändert. Bei einer solchen Vertheilung der Dichtigkeit in dem Ellipsoid (7) findet man wieder die Gleichung

$$\frac{U}{\alpha\beta\gamma} = \frac{U_1}{\alpha_1\beta_1\gamma_1},$$

die auf den Maclaurin'schen Satz führt. Da die Massen zweier Ellipsoide, deren Potentiale U und U_1 sind, sich durch die Integrale

$$4\pi\alpha\beta\gamma\int\limits_0^1\varrho\Theta^2 d\Theta \text{ und } 4\pi\alpha_1\beta_1\gamma_1\int\limits_0^1\varrho\Theta^2 d\Theta,$$

welche den Producten $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ proportional sind, ausdrücken lassen, so sind die Potentiale U und U_1 den entsprechenden Massen proportional.

Setzt man

$$2\int\varrho\Theta d\Theta = F(\Theta^2),$$

so ergiebt die Gleichung (24)

$$d_\lambda\left(\frac{U}{\alpha\beta\gamma}\right) = -\pi\left[F(1) - F(\Theta_1^2)\right]\frac{d\lambda}{\alpha\beta\gamma},$$

woraus folgt: 1) für einen inneren Punkt $M(x, y, z)$

$$U = \pi \sqrt{a_1 a_2 a_3} \int_0^\infty \left[F(1) - F(\Theta_1^2)\right] \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}, \quad (30)$$

2) für einen äusseren Punkt

$$U = \pi \sqrt{a_1 a_2 a_3} \int_{\lambda_1}^\infty \left[F(1) - F(\Theta_1^2)\right] \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}, \quad (31)$$

wo

$$\Theta_1^2 = \frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} + \frac{z^2}{a_3+\lambda}$$

und λ_1 die grösste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_1} + \frac{y^2}{a_2+\lambda_1} + \frac{z^2}{a_3+\lambda_1} = 1$$

ist. Die Formeln (28) und (29) sind in den Formeln (30) und (31) als Specialfälle enthalten. Das in (28) und (29) auftretende Integral nach λ lässt sich auf elliptische Integrale zurückführen.*) Auch das in (30) und (31) vorkommende Integral nach λ lässt sich auf derartige Integrale zurückführen, wenn $F(\Theta_1^2)$ eine algebraische rationale Function bezüglich Θ_1^2 ist.

Die Grenzen des Integrals nach λ in (31) können auf 0 und ∞ gebracht werden, wie in Formel (30); man braucht dazu nur $\lambda = \lambda_1 + s$ zu setzen und dann nach s zu integriren; dann geht (31) über in:

$$U = \pi \sqrt{a_1 a_2 a_3} \int_0^\infty \left[F(1) - F(\Theta_1^2)\right] \frac{ds}{\sqrt{(\alpha_1^2+s)(\beta_1^2+s)(\gamma_1^2+s)}} \quad (32)$$

mit

$$\Theta_1^2 = \frac{x^2}{\alpha_1^2+s} + \frac{y^2}{\beta_1^2+s} + \frac{z^2}{\gamma_1^2+s}.$$

32. Um die Projectionen der Attractionskraft P auf die Coordinatenaxen zu erhalten, muss man die partiellen Derivirten erster Ordnung von dem Potential U bezüglich der Coordinaten x, y, z des angezogenen Punktes M suchen.

1) Für einen inneren Punkt M giebt die Formel (30)

---

*) Legendre, Traité des fonctions elliptiques etc. T. I. — J. Somoff, Grundzüge der Theorie der elliptischen Functionen, 1850. (russ).

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}\int\limits_0^\infty F'(\Theta_1^2)\,\frac{\partial(\Theta_1^2)}{\partial x}\,\frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}},$$

wo $\frac{\partial(\Theta_1^2)}{\partial x} = \frac{2x}{a_1+\lambda}$ und $F'(\Theta_1^2)$ die Dichtigkeit ϱ für $\Theta = \Theta_1$ bedeutet, d. h. die Dichtigkeit auf der Oberfläche des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} + \frac{z^2}{a_3+\lambda} = \Theta_1^2.$$

Im Falle eines homogenen Ellipsoids ist $\varrho = F'(\Theta_1^2)$ eine constante Grösse.

Man hat also allgemein für die Projectionen der Anziehungskraft auf die Coordinaten-Axen die Formeln:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= -2\pi x\sqrt{a_1 a_2 a_3}\int\limits_0^\infty \frac{\varrho\, d\lambda}{(a_1+\lambda)\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}},\\
\frac{\partial U}{\partial y} &= -2\pi y\sqrt{a_1 a_2 a_3}\int\limits_0^\infty \frac{\varrho\, d\lambda}{(a_2+\lambda)\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}, \qquad (33)\\
\frac{\partial U}{\partial z} &= -2\pi z\sqrt{a_1 a_2 a_3}\int\limits_0^\infty \frac{\varrho\, d\lambda}{(a_3+\lambda)\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}.
\end{aligned}$$

2) Im Falle eines äusseren Punktes ergiebt sich aus Formel (31):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} = &-\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}\int\limits_{\lambda_1}^\infty F'(\Theta_1^2)\frac{\partial(\Theta_1^2)}{\partial x}\,\frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}\\
&-\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}\,[F(1)-F(\Theta_1^2)]\,\frac{1}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x}
\end{aligned}$$

für $\lambda = \lambda_1$.

Da $\Theta_1 = 1$ für $\lambda = \lambda_1$, so wird $F(1) - F(\Theta_1^2)$ zu Null. Die Grösse $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = h_1 \cos(h_1 x)$, wo h_1 der Differentialparameter erster Ordnung der elliptischen Coordinate λ_1 ist, ist eine endliche Grösse (s. Kinematik § 57, Formeln (12)); folglich verschwindet in der obigen Formel der vom Integralzeichen freie Theil. Daher hat man:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2\pi x\sqrt{a_1 a_2 a_3}\int\limits_{\lambda_1}^\infty \frac{\varrho\, d\lambda}{(a_1+\lambda)\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2\pi y\sqrt{a_1 a_2 a_3}\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\varrho\, d\lambda}{(a_2+\lambda)\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -2\pi z\sqrt{a_1 a_2 a_3}\int\limits_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\varrho\, d\lambda}{(a_3+\lambda)\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}.$$

33. Im Falle eines homogenen Ellipsoids tritt die Dichtigkeit ϱ als Factor vor das Integralzeichen, und wenn man

$$A = \int\limits_{\lambda_1}^{\infty}(a_1+\lambda)^{-\frac{1}{2}}(a_2+\lambda)^{-\frac{1}{2}}(a_3+\lambda)^{-\frac{1}{2}}\, d\lambda,$$

setzt, so kann man das Potential U (29) in der Form

$$U = \tfrac{3}{4}m\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial a_1}x^2 + 2\frac{\partial A}{\partial a_2}y^2 + 2\frac{\partial A}{\partial a_3}z^2\right) \quad (35)$$

darstellen, wenn $m = \frac{4}{3}\pi\varrho\sqrt{a_1 a_2 a_3}$ die Masse des gegebenen Ellipsoids ist. Ebenso nehmen die Formeln (34) die Gestalt an:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3mx\frac{\partial A}{\partial a_1},$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3my\frac{\partial A}{\partial a_2}, \quad (36)$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = 3mz\frac{\partial A}{\partial a_3}.$$

Im Falle eines äusseren Punktes ist die Niveaufläche (U) eine transcendente Fläche; denn die Grösse A und ihre Derivirten nach a_1, a_2, a_3 sind transcendente Functionen der Grösse λ_1, die eine Function der Coordinaten x, y, z ist. Im Falle eines inneren Punktes dagegen hängt λ_1 nicht von x, y, z ab, denn es ist $\lambda_1 = 0$. Daher sind auch A, $\frac{\partial A}{\partial a_1}$, $\frac{\partial A}{\partial a_2}$, $\frac{\partial A}{\partial a_3}$ von x, y, z unabhängig; folglich ist in diesem Falle die Niveaufläche (U), wie aus der Formel (35) ersichtlich, eine algebraische Fläche 2. Ordnung, die mit dem gegebenen Ellipsoid concentrisch ist. Man sieht nun leicht, dass die Integrale, die die Grössen

$$A, -\frac{\partial A}{\partial a_1}, -\frac{\partial A}{\partial a_2}, -\frac{\partial A}{\partial a_3}$$

ausdrücken, nur aus positiven Elementen bestehen; daher haben sie selbst positive Werthe; folglich ist die Niveaufläche (U), für jeden inneren Punkt ein dem gegebenen concentrisches und coaxiales Ellipsoid.

Bezeichnet δ das vom Centrum auf die Tangentenebene des Ellipsoids (U) im Punkte (x, y, z) gefällte Perpendikel, so erhält man (nach Kinematik § 54) für die Kraft, mit welcher die Masse m des gegebenen Ellipsoids einen inneren Punkt anzieht, den Ausdruck:

$$P = \frac{2(\frac{3}{4} mA - U)}{\delta}.$$

34. Es sei

$$\frac{\xi^2}{a_1} + \frac{\eta^2}{a_2} + \frac{\zeta^2}{a_3} = \Theta^2 \qquad (a)$$

ein dem gegebenen ähnliches Ellipsoid, das eine Masse von derselben Dichtigkeit ϱ enthält und einen inneren Punkt (x, y, z) anzieht.

Bezeichnet man mit U' das ihm entsprechende Potential, so erhält man den Werth von U', indem man in Formel (28) die Quadrate der Halbaxen a_1, a_2, a_3 mit den ihnen proportionalen Grössen $a_1\Theta^2$, $a_2\Theta^2$, $a_3\Theta^2$ vertauscht. Dadurch geht die Grösse A über in

$$\int_0^\infty (a_1\Theta^2 + \lambda)^{-\frac{1}{2}} (a_2\Theta^2 + \lambda)^{-\frac{1}{2}} (a_3\Theta^2 + \lambda)^{-\frac{1}{2}} d\lambda.$$

Dieses Integral nimmt, wenn man $\lambda = \lambda'\Theta^2$ setzt, die Gestalt an:

$$\frac{1}{\Theta}\int_0^\infty (a_1 + \lambda')^{-\frac{1}{2}} (a_2 + \lambda')^{-\frac{1}{2}} (a_3 + \lambda')^{-\frac{1}{2}} d\lambda' = \frac{1}{\Theta} A.$$

Ebenso findet man, dass $\frac{\partial A}{\partial a_1}$ in $\frac{1}{\Theta^3}\frac{\partial A}{\partial a_1}$ übergeht und dass die Masse m gleich $m\Theta^3$ wird. Folglich ist

$$U' = \tfrac{3}{4} m \left(A\Theta^2 + 2\frac{\partial A}{\partial a_1}x^2 + 2\frac{\partial A}{\partial a_2}y^2 + 2\frac{\partial A}{\partial a_3}z^2\right).$$

Subtrahirt man dies von dem Ausdruck (28) oder (35), so ergiebt sich

$$U - U' = \tfrac{3}{4} mA(1 - \Theta^2).$$

Diese Differenz ist für $\Theta^2 < 1$ das Potential einer zwischen zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden eingeschlossenen Schicht. Da dasselbe von den Coordinaten x, y, z eines in der Höhlung der Schicht, d. h. innerhalb des Ellipsoids (a) gelegenen Punktes nicht abhängt, so ist sein Differentialparameter erster Ordnung gleich Null; folglich ist die Attractions-

kraft gleich Null, was als ein zweiter Beweis des Newton'schen Satzes § 29 anzusehen ist.

35. Aus den Formeln (36) sieht man, dass für den Fall der Anziehung eines inneren Punktes durch ein Ellipsoid die Projectionen der anziehenden Kraft auf die Coordinaten-Axen den entsprechenden Coordinaten des angezogenen Punktes proportional sind; denn die Grössen $\frac{\partial A}{\partial a_1}, \frac{\partial A}{\partial a_2}, \frac{\partial A}{\partial a_3}$ sind von diesen Coordinaten unabhängig. Wenn man daher die Projectionen der einen Punkt (x, y, z) anziehenden Kraft P auf die Coordinaten-Axen mit X, Y, Z und die Projectionen der einen anderen Punkt (x', y', z') anziehenden Kraft P' mit X', Y', Z' bezeichnet, so hat man:

$$\frac{X}{x} = \frac{X'}{x'}, \quad \frac{Y}{y} = \frac{Y'}{y'}, \quad \frac{Z}{z} = \frac{Z'}{z'}.$$

Liegen die Punkte (x, y, z) und (x', y', z') auf einer durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehenden Geraden, so hat man, wenn r und r' die Entfernungen der Punkte von dem Mittelpunkte sind:

$$x : x' = y : y' = z : z' = r : r';$$

mithin ist dann

$$X : X' = Y : Y' = Z : Z' = r : r',$$

woraus folgt:

$$P : P' = r : r',$$

$$\frac{X}{P} = \frac{X'}{P'}, \quad \frac{Y}{P} = \frac{Y'}{P'}, \quad \frac{Z}{P} = \frac{Z'}{P'}.$$

Man sieht hieraus, dass *zwei Punkte, die auf einer durch das Centrum des Ellipsoids gehenden Geraden liegen, mit Kräften angezogen werden, die den Entfernungen der Punkte vom Mittelpunkte proportional und einander parallel sind.*

Da die durch die gegebenen Punkte hindurchgehenden Niveauflächen ähnliche Ellipsoide sind, wie aus Gleichung (35) hervorgeht, so sind die Richtungen der Kräfte P und P' die Normalen dieser Ellipsoide in den Punkten (x, y, z) und (x', y', z'). In dem speciellen Falle, dass diese Punkte auf einer der Axen des Ellipsoids liegen, haben die Kräfte P und P' beide die Richtung dieser Axe.

36. Wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb des gegebenen

Ellipsoids liegt, so kann man dasselbe auf Grund des Maclaurin'schen Satzes durch ein ihm confocales Ellipsoid ersetzen, auf dessen Oberfläche der Punkt (x, y, z) liegt, nämlich durch das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda_1} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda_1} = 1 \tag{37}$$

und auf dieses die Formeln (36) anwenden. Setzt man dann $a_1 + \lambda_1 = a'_1$, $a_2 + \lambda_1 = a'_2$, $a_3 + \lambda_1 = a'_3$ und $\lambda = \lambda_1 + \lambda'$, so erhält man

$$A = \int_0^\infty (a'_1 + \lambda')^{-\frac{1}{2}} (a'_2 + \lambda')^{-\frac{1}{2}} (a'_3 + \lambda')^{-\frac{1}{2}} d\lambda'$$

und $\frac{\partial A}{\partial a_1} = \frac{\partial A}{\partial a'_1}$. Sind ferner x', y', z' die Coordinaten eines in Bezug auf das Ellipsoid (37) inneren Punktes und ist U' das Potential der Attraction dieses Punktes durch die in dem Ellipsoid (37) enthaltene Masse m' von der Dichtigkeit ϱ, so hat man nach den Formeln (36)

$$\frac{\partial U'}{\partial x'} = 3m' x' \frac{\partial A}{\partial a_1},$$

wo $m' = \frac{4}{3}\pi\varrho\sqrt{a'_1 a'_2 a'_3}$; folglich ist

$$\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U'}{\partial x'} = mx : m'x' = x\sqrt{a_1 a_2 a_3} : x'\sqrt{a'_1 a'_2 a'_3}.$$

Wählt man nun den Punkt (x', y', z') so, dass

$$x' = x\sqrt{\frac{a_1}{a'_1}}, \quad y' = y\sqrt{\frac{a_1}{a'_2}}, \quad z' = z\sqrt{\frac{a_3}{a'_3}}, \tag{38}$$

so findet man, dass

$$\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U'}{\partial x'} = \sqrt{a_2 a_3} : \sqrt{a'_2 a'_3}. \tag{39}$$

Durch Substitution der Ausdrücke (38) in die Gleichung des gegebenen Ellipsoids

$$\frac{\xi^2}{a_1} + \frac{\eta^2}{a_2} + \frac{\zeta^2}{a_3} = 1$$

erhält man:

$$\frac{x^2}{a'_1} + \frac{y^2}{a'_2} + \frac{z^2}{a'_3} = 1.$$

Es zeigt dies, dass, wenn der Punkt M' auf dem gegebenen Ellipsoide liegt, der Punkt M dem confocalen Ellipsoide (37)

angehört; und umgekehrt, wenn man M auf dem Ellipsoide (37) gewählt hat, so liegt M' auf dem gegebenen. Zwei solche Punkte, auf zwei confocalen Ellipsoiden, deren Coordinaten die Bedingungen (38) erfüllen, d. h. den entsprechenden Halbaxen der Ellipsoide proportional sind, nennt man *entsprechende Punkte* (corresponding points). In Gleichung (39) liegt der folgende Satz: *Die Projection der Kraft, mit welcher ein gegebenes Ellipsoid einen äusseren Punkt M anzieht, auf eine der Axen dieses Ellipsoids verhält sich zu der Projection der Kraft, mit welcher das durch den Punkt M gehende, dem gegebenen gleichartige und confocale Ellipsoid den dem Punkte M entsprechenden Punkt M' des gegebenen Ellipsoids anzieht, auf dieselbe Axe, wie sich die Producte der zu der Projectionsaxe senkrechten Halbaxen der beiden Ellipsoide zu einander verhalten, also auch wie die Schnittflächen der Ellipsoide mit einer zur Projectionsaxe senkrechten Ebene.*

Dies ist der Satz von Ivory. Er hat ihn direct bewiesen, indem er von der Eigenschaft der entsprechenden Punkte ausging, dass die Entfernung zweier auf zwei confocalen Ellipsoiden gewählter Punkte gleich der Entfernung der ihnen entsprechenden Punkte ist.*) Poisson zeigte, dass der Ivory'sche Satz nicht nur für die Attraction nach dem Newton'schen Gesetze, sondern auch für die Attraction nach irgend einem anderen Gesetze gelte.**)

37. Die Integrale, welche das Potential und die Projectionen der anziehenden Kraft auf die Coordinatenaxen ausdrücken, reduciren sich auf cyklometrische und logarithmische Functionen, wenn zwei Axen des Ellipsoids einander gleich sind, d. h. im Falle eines Rotationsellipsoids. Wir wollen nun den Fall eines abgeplatteten homogenen (sogenannten planetaren) Rotationsellipsoids näher betrachten. Setzt man $a_1 = a_2$ und $a_1 > a_3$, so wird

$$A = \int_{\lambda_1}^{\infty} (a_1 + \lambda)^{-1} (a_3 + \lambda)^{-\frac{1}{2}} \, d\lambda .$$

---

*) On the attractions of homogeneous ellipsoids. Phil. Transact. (London, 1809), p. 355.

**) Bulletin de la société philomathique, novembre 1812.

In den Formeln (35) und (36) hat man $\frac{\partial A}{\partial a_1}$ und $\frac{\partial A}{\partial a_2}$ durch $\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial a_1}$ zu ersetzen;*) folglich wird:

$$U = \tfrac{3}{4} m \left[A + \frac{\partial A}{\partial a_1}(x^2 + y^2) + 2\frac{\partial A}{\partial a_3} z^2 \right], \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \tfrac{3}{2} m x \frac{\partial A}{\partial a_1}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \tfrac{3}{2} m y \frac{\partial A}{\partial a_1}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \tfrac{3}{2} m z \frac{\partial A}{\partial a_3}. \end{aligned} \tag{41}$$

Dabei hat man im Falle eines äusseren Punktes für λ_1 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a_1 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda} = 1, \tag{42}$$

die für λ vom 2. Grade ist, zu wählen. Der unter dem Integralzeichen von A stehende Ausdruck wird rational, wenn man

$$(a_3 + \lambda)^{-\frac{1}{2}} = u$$

setzt und so für λ die neue Variable u einführt. Setzt man ausserdem

$$\sqrt{a_3} = k,\ a_1 - a_3 = k^2 e^2 \text{ und } (a_3 + \lambda_1)^{-\frac{1}{2}} = u_1,$$

so folgt

$$A = 2\int_0^{u_1} \frac{du}{1 + k^2 e^2 u^2} = \frac{2}{ke} \arctan(keu_1),$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_1} = -\int_0^{u_1} \frac{2u^2\,du}{(1 + k^2e^2u^2)^2} = -\frac{1}{k^2e^2}\left[\frac{1}{ke}\arctan(keu_1) - \frac{u_1}{1 + k^2e^2u_1^2}\right],$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_3} = -\int_0^{u_1} \frac{u^2\,du}{1 + k^2e^2u^2} = -\frac{1}{k^2e^2}\left[u_1 - \frac{1}{ke}\arctan(keu_1)\right].$$

Hierin ist k die kleine Halbaxe des Meridians und e das Verhältniss der Excentricität zu dieser Halbaxe. Die Gleichung (42) geht in die folgende über:

---

*) Denn im vorliegendem Falle ist $\frac{\partial A}{\partial a_1}$ das, worauf sich der Ausdruck $\frac{\partial A}{\partial a_1} + \frac{\partial A}{\partial a_2}\frac{d a_2}{d a_1}$ reducirt, wenn man $a_1 = a_2$ setzt.

$$\left(\frac{x^2+y^2}{1+k^2e^2u^2}+z^2\right)u^2=1. \tag{43}$$

Löst man dieselbe nach u^2 auf und wählt die positive Wurzel, so erhält man u_1^2 und somit u_1. Da u_1 und U (40) Functionen von x^2+y^2 sind, so ist die Niveaufläche (U) eine Rotationsfläche um die z-Axe. Bezeichnet r den Radius des Parallelkreises, auf dem der Punkt (x, y, z) liegt, so hat man $x^2+y^2=r^2$; man kann daher die Formeln (43) und (40) auch schreiben:

$$\left(\frac{r^2}{1+k^2e^2u^2}+z^2\right)u^2=1,$$

$$U=\tfrac{3}{4}m\left(A+\frac{\partial A}{\partial a_1}r^2+2\frac{\partial A}{\partial a_3}z^2\right).$$

Die Attractionskraft P liegt in der Meridianebene des Punktes (x, y, z) und lässt sich durch ihre Projectionen bestimmen, nämlich durch die Projection auf die z-Axe

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{3mz}{k^2e^2}\left[u_1-\frac{1}{ke}\arctan(keu_1)\right]$$

und durch die Projection auf ein vom Punkte (x, y, z) auf diese Axe gefälltes Perpendikel

$$R=\frac{\partial U}{\partial r}=-\frac{3mr}{2k^2e^2}\left[\frac{1}{ke}\arctan(keu_1)-\frac{u_1}{1+k^2e^2u_1^2}\right];$$

diese letztere Projection ist zugleich auch die Projection der Kraft P auf die im Mittelpunkte des Ellipsoids senkrecht zur z-Axe errichtete Ebene, die man die Ebene des Aequators nennt. In diesen Formeln ist überall

$$m=\tfrac{4}{3}\pi\varrho k^3(1+e^2).$$

Für einen auf der Oberfläche oder innerhalb des Ellipsoids gelegenen Punkt (x, y, z) hat man $\lambda_1=0$ zu setzen. Dann ist $u_1=a_3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{k}$ und folglich:

$$\begin{aligned} Z&=-4\pi\varrho\frac{1}{e^2}(1+e^2)z\left[1-\frac{1}{e}\arctan(e)\right],\\ R&=-2\pi\varrho\frac{1}{e^2}(1+e^2)r\left[\frac{1}{e}\arctan(e)-\frac{1}{1+e^2}\right]. \end{aligned} \tag{44}$$

Nehmen wir nun an, der angezogene Punkt liege auf der Oberfläche des Ellipsoids und die Grösse e des Verhältnisses der Excentricität des Meridians zu der halben Rotationsaxe k

sei so klein, dass man höhere Potenzen als e^2 vernachlässigen darf. Dann erhält man durch Entwickelung des Ausdrucks (44) nach Potenzen von e^2 die approximativen Werthe:

$$\begin{aligned} Z &= -\tfrac{4}{3}\pi\varrho z(1+\tfrac{2}{5}e^2), \\ R &= -\tfrac{4}{3}\pi\varrho r(1-\tfrac{1}{5}e^2). \end{aligned} \tag{45}$$

Die Richtung der Attractionskraft $P = \sqrt{Z^2 + R^2}$ lässt sich durch den Winkel bestimmen, welchen sie mit der grossen Halbaxe des durch den Punkt (x, y, z) gehenden Meridians oder mit der Ebene des Aequators bildet. Bezeichnet man diesen Winkel mit φ, so hat man

$$\tan\varphi = \frac{Z}{R}\cdot$$

Die Formeln (45) geben

$$\tan\varphi = \frac{z(1+\frac{2}{5}e^2)}{r(1-\frac{1}{5}e^2)} = \frac{z}{r}(1+\tfrac{3}{5}e^2). \tag{46}$$

Hierin ist $\frac{z}{r}$ die Tangente des Winkels, den der vom Mittelpunkte des Ellipsoids nach dem angezogenen Punkte M gezogene Radiusvector $OM = u$ mit der Ebene des Aequators bildet. Nennt man diesen Winkel l, so ist $\tan l = \frac{z}{r}$, mithin nach Formel (46)

$$\tan\varphi = \tan l\cdot(1+\tfrac{3}{5}e^2). \tag{47}$$

Man sieht hieraus, dass die Richtung der Kraft P im Allgemeinen nicht mit dem Radius MO zusammen fällt. Dies tritt nur dann ein, wenn der Punkt M in der Ebene des Aequators oder auf der Rotationsaxe des Ellipsoids liegt. Auch fällt die Richtung von P nicht mit der Normale des anziehenden Ellipsoids im Punkte M zusammen, ausgenommen in den beiden eben genannten Fällen. Bezeichnet β den Winkel zwischen dieser Normale und der Ebene des Aequators, so findet man leicht, dass

$$\tan\beta = \tan l\cdot(1+e^2) \tag{48}$$

ist. Eliminirt man $\tan l$ aus (47) und (48), so folgt:

$$\tan\varphi = \tan\beta\cdot\frac{1+\frac{3}{5}e^2}{1+e^2} = \tan\beta\cdot(1-\tfrac{2}{5}e^2).$$

Dies zeigt, dass $\varphi < \beta$, d. h. dass die Kraft weniger gegen den Aequator geneigt ist, als die Normale im Punkte M.

Die Differenz $\beta - \varphi$, welche gleich dem Winkel zwischen der Kraft P und der Normale ist, bestimmt sich annähernd durch die Formel

$$\beta - \varphi = \tfrac{1}{8} e^2 \sin(2\beta).$$

Die Formeln (45) geben für den Werth der Attractionskraft $P = \sqrt{Z^2 + R^2}$ den approximativen Ausdruck

$$P = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\sqrt{z^2 + r^2}\left(1 + \tfrac{1}{5}e^2 \frac{2z^2 - r^2}{z^2 + r^2}\right);$$

hieraus ergiebt sich, wenn man beachtet, dass $z^2 + r^2 = u^2$ und $\frac{z}{u} = \sin l$ ist, der Werth

$$P = \tfrac{4}{3}\pi\varrho u\,(1 - \tfrac{1}{5}e^2 + \tfrac{3}{5}e^2 \sin^2 l);$$

nun giebt aber Formel (48)

$$\sin^2 l = \sin^2\beta\,(1 - e^2 \sin^2\beta \cos^2\beta);$$

man kann daher mit Vernachlässigung höherer Potenzen von e^2 setzen

$$P = \tfrac{4}{3}\pi\varrho u\,(1 - \tfrac{1}{5}e^2 + \tfrac{3}{5}e^2 \sin^2\beta). \tag{49}$$

Wendet man nun diese Formel auf das Erdellipsoid an, welches man annähernd als ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid ansehen kann, so hat man approximativ $e = 0{,}082$ zu setzen. In diesem Falle ist der Winkel β annähernd die geographische Breite des Punktes M. Bei einer Breite, deren Cosinus gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, hat man $\cos^2\beta = \frac{1}{3}$, so dass die Formel (49) ergiebt:

$$P = \tfrac{4}{3}\pi\varrho u.$$

Dies ist aber die Kraft, mit welcher eine homogene Kugel von der Dichtigkeit ϱ, deren Centrum in O und deren Radius gleich u ist, den Punkt M anziehen würde (s. § 26).

Die Gleichung des Meridians

$$\frac{r^2}{k^2(1 + e^2)} + \frac{z^2}{k^2} = 1$$

giebt

$$\frac{u^2\cos^2 l}{k^2(1 + e^2)} + \frac{u^2 \sin^2 l}{k^2} = 1;$$

hieraus folgt annähernd

$$u = k(1 + \tfrac{1}{2}e^2 \cos^2 l),$$

was mit Hilfe der Formel (48) auf den Ausdruck

$$u = k\,(1 + \tfrac{1}{2}e^2 \cos^2 \beta)$$

führt. Substituirt man denselben für u in die Formel (49), so folgt:

$$P = \tfrac{4}{3}\pi\varrho k\,(1 + \tfrac{3}{10}e^2 + \tfrac{1}{10}e^2 \sin^2 \beta). \qquad (50)$$

Multiplicirt man P mit dem in § 20 der Einfachheit halber weggelassenen Coefficienten μ, der das Verhältniss der Anziehungskraft zweier materiellen Punkte in der Entfernung 1 zu den Massen dieser Punkte darstellt, so erhält man die Grösse $P\mu$, welche die Beschleunigung ist, mit der ein in der Nähe der Erdoberfläche befindlicher Körper fallen würde, wenn die Erde von dem fallenden Körper nicht angezogen würde und keine Rotationsbewegung um ihre Axe hätte. Diese Beschleunigung unterscheidet sich von der in Wirklichkeit beobachteten Beschleunigung des freien Falles, welche letztere als relative Beschleunigung anzusehen ist (s. Kinem. Cap. XVII). Wir werden an einer anderen Stelle zeigen, wie sich der Unterschied zwischen diesen beiden Beschleunigungen bestimmen lässt.

38. Das Problem der Anziehung eines Punktes durch ein homogenes Ellipsoid bot für die Geometer ein besonderes Interesse dar wegen der Schwierigkeit der Lösung für den Fall, dass der angezogene Punkt ausserhalb des Ellipsoids liegt. Newton fand den in § 29 bewiesenen Satz über die Wirkung einer von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden eingeschlossenen Schicht auf einen in der Höhlung liegenden Punkt; mit Hilfe dieses Satzes führte er dann das Problem der Anziehung eines inneren Punktes auf das eines Punktes auf der Oberfläche zurück. Newton zeigte überdies, dass die Kräfte, mit welchen zwei ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsoide zwei ähnlich auf ihren Oberflächen gelegene Punkte anziehen, den Entfernungen dieser Punkte vom Mittelpunkte der Ellipsoide proportional sind (s. § 35). Er bestimmte ausserdem die Grösse der Kraft, mit welcher ein Rotationsellipsoid die auf der Rotationsaxe gelegenen Punkte anzieht. Maclaurin fand die Anziehung, welche ein Rotationsellipsoid auf einen beliebigen auf seiner Oberfläche befindlichen Punkt ausübt und gab ohne Beweis den Satz, der

die Wirkung zweier confocalen Ellipsoide auf einen und denselben Punkt betrifft (S. 196), wobei er sich jedoch auf den speciellen Fall beschränkte, dass der Punkt auf einer der Axen des Ellipsoids liegt. Mit Hilfe dieses Satzes leitete er die Wirkung ab, welche ein Rotationsellipsoid auf einen äusseren Punkt ausübt, der auf der Rotationsaxe oder in einer zu dieser Axe senkrechten Ebene liegt.*) Hierauf bestimmten d'Alembert**) und Lagrange***) die Kraft, mit der ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen einen beliebigen auf seiner Oberfläche gelegenen Punkt anzieht. D'Alembert zweifelte anfangs daran, dass der Maclaurin'sche Satz für ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen giltig sei; doch bewies er ihn später in einem Briefe an Lagrange auf synthetischem Wege.†) Hierauf gab Lagrange einen analytischen Beweis dieses Satzes.††) Legendre zeigte, dass der Maclaurin'sche Satz für jede Lage eines äusseren angezogenen Punktes gelte und gab eine vollständige Lösung des Problems von der Attraction eines Punktes durch ein Rotationsellipsoid.†††) Die erste vollständige Lösung des Problems der Attraction eines inneren sowohl, als eines äusseren Punktes durch ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen wurde von Laplace gegeben.*†) Hierauf führte Ivory*††) die Lösung des Problems von der Anziehung eines beliebigen äusseren Punktes durch ein homogenes Ellipsoid auf das Problem der Anziehung eines inneren Punktes zurück, und zwar mit Hilfe des in § 36 bewiesenen Satzes. Später

---

*) „De causa physica fluxus et refluxus maris“, Prix de l'Académie des sciences de Paris, T. IV. Treatise on fluxions, L. I.

**) Opuscules math. V. 6: „Suite des recherches sur la figure de la terre“.

***) „Sur l'attraction des sphéroides elliptiques,“ Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1773. S. auch Oeuvres de Lagrange, T. III.

†) Oeuvres de Lagrange, T. III, p. 649.

††) Ib. p. 651.

†††) Mémoires de l'Acad. des sciences de Paris. Savants étrangers, T. X. 1785.

*†) Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 1782. — Mécanique céleste, livre III, chap. 1.

*††) Philosophical Transactions (London, 1809), p. 345.

folgte: a) eine einfache allgemeine Lösung von Gauss;*) b) eine Lösung von Poisson,**) der die Anziehung eines äusseren Punktes unabhängig von der eines inneren oder auf der Oberfläche befindlichen Punktes betrachtet; c) eine einfache Lösung von Chasles; dieselbe beruht auf dem Satze von Maclaurin, den Chasles in seiner allgemeinsten Form auf elementarem Wege beweist, und auf einem Satze von Laplace über die Anziehung eines auf der Oberfläche einer unendlich dünnen Schicht befindlichen Punktes durch diese Schicht;***) d) eine analytische Methode von Lejeune-Dirichlet, die auf einer scharfsinnigen Reduction eines dreifachen Integrals auf ein einfaches beruht; es geschieht dies durch Verwandlung der Integrationsgrenzen in $-\infty$ und $+\infty$ durch Multiplication der zu integrirenden Function mit einem Factor, der innerhalb der Grenzen des Integrals gleich 1, ausserhalb derselben aber gleich Null ist.†) In einem Briefe an Liouville theilte Jacobi††) mit, dass er eine der Maclaurin'schen ähnliche Lösung des Problems von der Anziehung eines äusseren Punktes durch ein homogenes Ellipsoid gefunden habe, und zwar vermittelst dreierlei Vertauschungen der Variablen, und dass diese Umformungen eine bemerkenswerthe geometrische Bedeutung haben. Cayley erläuterte diese Bedeutung und gab die Ableitung der, einer der Axen des Ellipsoids parallelen Componente der Attractionskraft.†††) Mertens*†) leitete einen allgemeinen Ausdruck für das Poten-

*) Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum methodo nova tractata. Comment. soc. reg. sc. Goettingensis recentiores. T. II (1813).

**) Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène (lu le 7 octobre 1833). Mém. de l'Acad. T. XIII.

***) Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, T. VI (1836). — Journal de Liouville, T. V (1840).

†) Akad. der Wissenschaften zu Berlin, 1839. Eine Darlegung dieser Methode in russischer Sprache findet man in des Verfassers „Theorie der elliptischen Functionen", St.-Petersburg, 1850.

††) Journ. de Liouville, T. XI (1846).

†††) Cambridge and Dublin Math. Journ., Vol. V. On the attraction of ellipsoïds (Jacobi's method).

*†) Mertens „Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids" in Crelle's Journ., Bd. 70 (1869), S. 1.

tial eines äusseren, sowie auch eines inneren Punktes unabhängig von den Ausdrücken für die den Axen parallelen Componenten der Attractionskraft ab; er stützte sich dabei auf einen bemerkenswerthen Ausdruck für ein Doppelintegral, den Jacobi gegeben hatte, und setzte voraus, dass das Ellipsoid auf beliebige geradlinige Coordinaten mit dem Ursprung im Mittelpunkte bezogen sei.

Die in den vorhergehenden §§ von uns dargelegte Methode, nach der man direct das Potential der Attraction des Ellipsoids erhält, ist eine Vereinfachung und Abänderung des Gauss'schen Verfahrens. Dieselbe ist von uns am 11. Sept. 1873 der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften vorgelegt worden.*) Wir haben dort gezeigt, wie man durch Transformation der Coordinaten aus der Formel (29) den Ausdruck des Potentials für den Fall erhalten kann, dass die Gleichung des Ellipsoids und der angezogene Punkt auf ein rechtwinkliges Axensystem bezogen sind, dessen Ursprung zwar im Mittelpunkte des Ellipsoids liegt, dessen Axen aber nicht mit den Hauptaxen des Ellipsoids zusammenfallen. Dieser Ausdruck wurde von Lejeune-Dirichlet gefunden und steht im § 4 seiner nach seinem Tode erschienenen Abhandlung: „Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik".**)

Einige Eigenschaften der Attraction eines Punktes durch ein Ellipsoid lassen sich auch auf andere Oberflächen zweiter Ordnung ausdehnen.***)

39. Die Anziehung eines Punktes durch ein homogenes Polyeder von beliebiger Form kann man folgendermassen finden. Man betrachtet das Polyeder als eine algebraische Summe von

---

*) Bulletin de l'Acad. des sciences de St.-Pétersbourg, T. XIX, p. 215—225.

**) Crelle's Journ., Bd. 58 (1861), S. 181.

***) Untersuchungen über diesen Gegenstand findet man in den folgenden Werken: Bourget, Note sur l'attraction des paraboloïdes elliptiques (Journ. de Liouville, 2me série, T. II); Hirst, Sur le potentiel d'une couche infiniment mince, comprise entre deux paraboloïdes elliptiques; Bourget, Note à l'occasion du mémoire de M. Hirst (Journ. de Liouville, 2me série, T. II); Mehler, Ueber die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale (Crelle's Journ., Bd. 60 (1863), S. 321).

Pyramiden, deren gemeinsame Spitze der angezogene Punkt und deren Grundflächen die Seitenflächen des Polyeders sind. Dabei hat man in dieser Summe diejenigen Pyramiden, deren Grundflächen für ein in der Spitze befindliches Auge durch das Polyeder verdeckt sind, als positive und die Pyramiden, deren Grundflächen unverdeckt sind, als negative Glieder in Rechnung zu bringen. Hierauf bestimmt man die Kräfte, mit welchen die ersteren Pyramiden den in der Spitze befindlichen Punkt anziehen, sowie die Kräfte, mit denen die anderen Pyramiden denselben Punkt abstossen. Die geometrische Summe aller dieser Kräfte ist die Kraft, mit welcher das Polyeder den gegebenen Punkt anzieht. Um die Kraft zu bestimmen, mit der eine Pyramide einen in der Spitze gelegenen Punkt anzieht oder abstösst, zerlegt man sie vermittelst durch die Höhe und die Seitenkanten gelegter Ebenen in dreiseitige Pyramiden und jede von diesen wiederum in zwei andere durch eine Ebene, die durch die Höhe hindurchgeht und auf der gegenüberliegenden Kante senkrecht steht. Dadurch reducirt sich die Bestimmung der Einwirkung der ganzen Pyramide auf den Punkt M auf die Bestimmung der Einwirkung von Tetraedern von der Form $ABCM$ (Fig. 29), wo AM auf der Ebene des bei B rechtwinkligen Dreiecks ABC senkrecht steht. Die Anziehung oder Abstossung, welche dieses Tetraeder auf den Punkt M ausübt, ist durch ihre Projectionen auf die Kanten MA, AB und BC bestimmt; diese Projectionen aber lassen sich durch Integrale ausdrücken, die auf cyklometrische und logarithmische Functionen führen. Eine derartige Lösung des Problems der Anziehung eines Punktes durch ein Polyeder findet man in der Abhandlung von Th. d'Estoquois: „Sur l'attraction des polyèdres", Besançon 1844. Ferner sei erwähnt die Dissertation von Professor Th. Al. Sludsky: „Ueber die Ablenkung des Pendels", Moskau 1863 (russ.); F. Q. Mehler: „Ueber die Anziehung eines homogenen Polyeders" in Crelle's Journ., Bd. 66 (1866), S. 375; Mertens: „Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders" in Crelle's Journ., Bd. 69 (1868), S. 286.

Fig. 29.

M

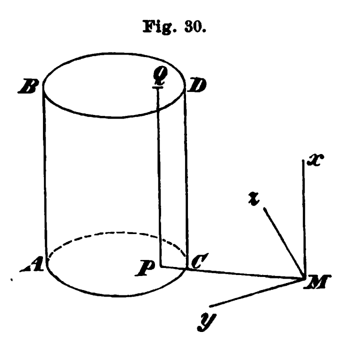
A B

C

40. Wir wollen nun die Anziehung eines Punktes durch einen geraden Cylinder bestimmen, dessen Dichtigkeit längs einer Parallelen zu den Erzeugenden des Cylinders constant ist, sich aber mit der Lage dieser Geraden ändert. Liegt der angezogene Punkt nicht in der Ebene der Cylinderbasis, so kann man die Kraft, mit welcher der Punkt von dem gegebenen Cylinder angezogen wird, ansehen als die geometrische Summe oder Differenz der Anziehungen durch zwei Cylinder, deren gemeinsame Basis die durch den Punkt M gehende, auf den Cylindererzeugenden senkrechte Ebene ist. Es wird daher genügen, den Fall zu betrachten, dass der angezogene Punkt in der Cylinderbasis liegt.

Es sei $ABCD$ (Fig. 30) ein gerader Cylinder, $AB = h$ seine Höhe, S der Flächeninhalt der Basis, dS ein Element dieser Basis von zwei unendlich kleinen Dimensionen, PQ eine durch einen Punkt dieses Elements gehende Parallele zu den Erzeugenden, μ ein beliebiger Punkt auf dieser Geraden zwischen der Basis und einer in der Höhe h parallel zur Basis gelegten Ebene, endlich M der angezogene Punkt, der innerhalb oder ausserhalb der Fläche S liegen kann. Setzt man $MP = r$, $P\mu = x$ und bezeichnet mit ϱ die in allen Punkten der Geraden PQ gleiche Dichtigkeit, so erhält man für das Massenelement im Punkte μ den Ausdruck $dm = \varrho dS dx$; folglich ist

Fig. 30.



$$\frac{dm}{M\mu^2} = \frac{\varrho dS dx}{r^2 + x^2}$$

die Kraft, mit welcher dieses Element den Punkt M anzieht, und

$$\frac{r\varrho dS dx}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{x\varrho dS dx}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ihre Projectionen auf MP und auf die den Cylindererzeugenden parallele Gerade Mx.

Bezeichnet man mit RdS und XdS die nach denselben Richtungen genommenen Projectionen der Resultante aller

Kräfte, mit denen die auf der Geraden PQ liegenden Punkte den Punkt M anziehen, so hat man:

$$
\begin{aligned}
RdS &= r\varrho dS\int_0^h \frac{dx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varrho h dS}{r(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}}},\\
XdS &= \varrho dS\int_0^h \frac{x dx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{(r^2-h^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\varrho dS.
\end{aligned} \tag{51}
$$

Bestimmt man die Lage des Punktes P durch seinen Radiusvector $MP = r$ und den Winkel φ, den derselbe mit einer beliebig in der Ebene S angenommenen Axe My einschliesst, so ist $dS = r dr d\varphi$. Denkt man sich also die Kraft P, mit welcher der ganze Cylinder $ABCD$ den Punkt M anzieht, auf die Axe My und auf die zu ihr senkrechte, gleichfalls in der Ebene S liegende Axe Mz projicirt, so sind diese Projectionen:

$$
\begin{aligned}
P\cos(Py) &= \int R\cos\varphi dS = h\int\frac{\varrho\cos\varphi dr d\varphi}{(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}}},\\
P\cos(Pz) &= \int R\sin\varphi dS = h\int\frac{\varrho\sin\varphi dr d\varphi}{(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{52}
$$

Als Projection der Kraft P auf die Axe Mx ergiebt sich:

$$
P\cos(Px) = \int XdS = \int\varrho dr d\varphi - \int\frac{\varrho r dr d\varphi}{(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{53}
$$

Die Integrationen nach r und φ erstrecken sich über die Fläche S. Man wende die Formeln (52) und (53) z. B. an auf ein Parallelepipedon, auf einen Kreiscylinder und auf ein dreiseitiges Prisma, unter der Voraussetzung eines constanten ϱ.*)

---

*) Die Anziehung eines Punktes durch cylindrische und conische Körper findet man in folgenden Werken behandelt:

Bessel in Zach's monatlicher Correspondenz, Bd. 27, S. 82.

O. Röthig „Das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedums“ in Crelle's Journ., Bd. 58 (1861), S. 249.

Grube „De cylindri et coni attractione,“ Goett. 1859.

O. Röthig „Das Potential eines homogenen rechtwinkligen Cylinders“ und Bemerkung hierzu von A. Clebsch in Crelle's Journ., Bd. 61 (1863), S. 180.

41. Ein besonderes Interesse in analytischer Beziehung bietet die Anziehung eines Punktes durch einen in der Richtung der Erzeugenden nach beiden Seiten hin unbegrenzten Cylinder.

Setzt man in den Formeln (51) $h = \infty$, so folgt:

$$RdS = \frac{\varrho dS}{r}, \quad XdS = \frac{\varrho dS}{r}.$$

Die geometrische Summe dieser Componenten ist die Kraft, mit welcher der Punkt M durch eine unendliche homogene Gerade angezogen wird, die im Punkte P auf der Ebene S senkrecht steht. Da diese Componenten gleich und auf einander senkrecht sind, so ist ihre geometrische Summe gleich $\frac{\varrho dS}{r}\sqrt{2}$ und schliesst in der Ebene PMx mit der Axe Mx einen Winkel von 45° ein.

Addirt man zu der längs MP gerichteten Componente RdS geometrisch eine Componente, die der längs Mx gerichteten Componente XdS entgegengesetzt gleich ist, so erhält man die Kraft, mit der der Punkt M durch eine unendliche im Punkte P im entgegengesetzten Sinne von PQ errichtete Senkrechte angezogen wird. Daher ist die Anziehungskraft, die der Punkt M durch eine in P auf S errichtete und nach beiden Seiten unbegrenzte Senkrechte erleidet, aus zwei gleichen längs MP gerichteten Kräften RdS von demselben Sinne zusammengesetzt. Diese Kraft ist also gleich $2RdS = \frac{2\varrho dS}{r}$ und hat die Richtung MP.

Man kann diese Kraft als von der Anziehung des Punktes M durch die Masse eines Elements dS herrührend betrachten, welches die Dichtigkeit 2ϱ hat; dabei wäre diese Kraft als umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung des Punktes M von dS wirkend zu denken.

Hieraus folgt, dass *die Anziehung eines Punktes M nach dem Newton'schen Gesetze durch einen nach beiden Seiten unbegrenzten Cylinder sich zurückführen lässt auf eine der ersten Potenz des Abstandes umgekehrt proportionale Anziehung des Punktes durch eine Masse, die über die Schnittfläche des Cylinders mit der durch den Punkt M gehenden und auf den Erzeugenden senkrechten Ebene vertheilt ist.*

Die Kraft $\frac{2\varrho dS}{r}$, mit welcher ein Element $2\varrho dS$ der über die Fläche S vertheilten Masse den Punkt M anzieht, ist der Differentialparameter erster Ordnung der Function $-2\varrho\log(r)$. Folglich kann man diese Function als das Potential der Anziehung des Punktes M durch ein Element $2\varrho dS$ ansehen; das Integral

$$U = -2\int\varrho\log(r)dS, \tag{54}$$

das über die ganze Fläche S zu erstrecken ist, ist dann das Potential der Resultante aller solchen Kräfte, d. h. das Potential der Kraft, mit der die ganze Fläche S den Punkt M anzieht. Ein Potential von der Form (54) nennt man ein *logarithmisches* oder *cylindrisches Potential.*

Es lässt sich leicht beweisen, dass, wenn die Fläche S endliche Dimensionen und ϱ in allen Punkten dieser Fläche endliche Werthe hat, das logarithmische Potential in jedem Punkte M der Ebene S einen einzigen endlichen Werth hat und bei jeder unendlich kleinen Verschiebung des Punktes M ein unendlich kleines Increment erhält. Da nämlich

$$r > \log(r) > -\frac{1}{r}$$

für jedes $r > 1$ und für jedes $r < 1$, so ist

$$\int\varrho r dS > \int\varrho\log(r)dS > -\int\frac{\varrho}{r}dS.$$

Bestimmt man nun die Lage des Elements dS durch den Radiusvector r und den Winkel φ, den derselbe mit der in der Ebene S gezogenen Axe My bildet, so hat man:

$$\int\varrho r dS = \int\varrho r^2 dr d\varphi \quad \text{und} \quad \int\frac{\varrho}{r}dS = \int\varrho dr d\varphi.$$

Bezeichnet R den Maximalwerth von r und k den Maximalwerth der Dichtigkeit ϱ, so sieht man leicht, dass

$$\int\varrho r dS < k\frac{R^3}{3}\varphi \quad \text{und} \quad \int\frac{\varrho}{r}dS < kR\varphi$$

ist, wenn φ derjenige Bogen eines Kreises vom Radius 1 und vom Mittelpunkte M ist, der die Schnittpunkte aller möglichen Radienvectoren r mit diesem Kreise enthält. Daher liegt der

Werth von $\int\varrho \log(r)dS$ zwischen den Grenzen $k\frac{R^3}{3}\varphi$ und $-kR\varphi$. Diese Grenzen haben aber endliche Werthe, wenn die Fläche S endliche Dimensionen hat und wenn ϱ in der ganzen Ausdehnung von S endlich ist. Sind beide Dimensionen von S unendlich klein und liegt M ausserhalb der Fläche S, so ist φ unendlich klein; wenn M ein innerer Punkt ist, wird der Radius R unendlich klein. Daher ist der Werth des Integrals $\int\varrho \log(r)dS$ und ebenso auch der Werth des Potentials $U = -2\int\varrho \log(r)dS$ bei unendlich kleinen Dimensionen der Fläche S jedenfalls unendlich klein.

Nehmen wir nun an, der Punkt M erleide eine Verschiebung $MM' = h$; es sei r' der von M' nach dS gezogene Radiusvector und $\varDelta U$ das dieser Verschiebung entsprechende Increment des Potentials U. Man hat dann:

$$\frac{\varDelta U}{h} = 2\int\varrho \log\left(\frac{r'}{r}\right)\frac{1}{h}\,dS. \tag{55}$$

Man sieht leicht, dass diese Grösse bei unendlich kleinem h einen endlichen Werth hat, der sich, wenn h gegen Null convergirt, der Derivirten $\frac{dU}{ds}$ bezüglich der Differentialverschiebung ds des Punktes M nach der Richtung h nähert, zugleich aber auch der Projection der Kraft, mit der der Punkt M von der ganzen Masse der Fläche S angezogen wird, auf diese Richtung h. Bedeutet nämlich φ den Winkel zwischen dem Radiusvector r und der Richtung h, so hat man $r'^2 = r^2 + 2rh\cos\varphi + h^2$, folglich:

$$2\log\left(\frac{r'}{r}\right)\cdot\frac{1}{h} = \frac{1}{h}\log\left(1 - \frac{2h\cos\varphi}{r} + \frac{h^2}{r^2}\right).$$

Ist r nicht gleich Null, so geht dieser Ausdruck für $h = 0$, wie leicht zu sehen, in $-\frac{2}{r}\cos\varphi$ über. Liegt der Punkt M ausserhalb der Fläche S, so kann r für kein Element dS gleich Null werden. Also ist in diesem Falle

$$\frac{dU}{ds} = -2\int\frac{\varrho}{r}\cos\varphi\, dS.$$

Hierin ist $-\frac{2\varrho}{r}\cos\varphi dS$ die Projection der Kraft, mit der die Masse eines Elements der Fläche S den Punkt M anzieht,

auf h; deshalb ist die rechte Seite die Projection der Resultante aller solchen Kräfte auf h; bezeichnen wir diese Resultante mit p, so ist

$$\frac{dU}{ds} = p \cos (pds).$$

Diese Formel gilt aber auch für den Fall, dass der Punkt M in der Fläche S liegt. In der That, für alle Elemente dS in endlicher Entfernung von M geht der in (55) unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck für $h = 0$ in $-\frac{2\varrho}{r}\cos\varphi dS$ über; für ein dem Punkte M unendlich nahes Element dS wird aber die Grösse $2\varrho \log\left(\frac{r'}{r}\right)\frac{dS}{h}$ unendlich klein. Sie hat daher keinen Einfluss auf den Werth des Integrals.*)

Setzt man $dS = rdrd\varphi$, so wird

$$p \cos (pds) = -2\int \varrho \cos \varphi dr d\varphi.$$

Der Absolutwerth dieses Ausdruckes ist kleiner als $2kR\varphi$ wenn k der Maximalwerth der Dichtigkeit ϱ, R der Maximalwerth von r und φ nicht grösser als 2π ist. Man sieht hieraus, dass die Kraft p bei endlichen Dimensionen der Fläche S einen endlichen Werth hat, dass sie aber unendlich klein wird, wenn beide Dimensionen der Fläche unendlich klein sind, und zwar sowohl im Falle eines äusseren, als eines inneren Punktes M.

Hieran reihen sich noch die folgenden Eigenschaften des

---

*) Wählt man für r und r' unendlich kleine Grössen von derselben Ordnung wie h, so dass das Verhältniss $\frac{r'}{r}$ weder unendlich klein noch unendlich gross ist, so hat $\log\left(\frac{r'}{r}\right)$ einen endlichen Werth, der durch die Multiplication mit der unendlich kleinen Grösse $\frac{dS}{h}$ ein unendlich kleines Product giebt. Ist dagegen $\frac{r'}{r}$ unendlich gross, so ist es von derselben Ordnung wie $\frac{1}{h}$; daher ist dann $\log\left(\frac{r'}{r}\right) h$, also auch $\log\left(\frac{r'}{r}\right) h \cdot \frac{dS}{h^2}$ unendlich klein; ebenso kann man schliessen, wenn $\frac{r'}{r}$ unendlich klein ist.

Potentials U und der Kraft p. Wenn die Masse $m = \int 2\varrho dS$ für endliche Dimensionen der Fläche S einen endlichen Werth hat, so wird, wenn sich der angezogene Punkt M von einem beliebig in endlicher Entfernung von den Punkten der Fläche S gewählten Punkte O entfernt, das Potential U unendlich gross, die Kraft p aber unendlich klein. Dabei hat man für $MO = \delta = \infty$ die Relationen

$$\frac{-U}{\log \delta} = m, \quad p \cos(p\delta)\delta = p\delta = m;$$

d. h. $-U$ wird unendlich gross von derselben Ordnung wie $\log \delta$ und p unendlich klein von derselben Ordnung wie $\frac{m}{\delta}$; die Richtung der Kraft $\bar{p}$ fällt mit der Richtung MO zusammen.

Um dies zu beweisen, nehmen wir, wie in § 27, an, dass u_1 der grösste unter allen von O und r_1 der kleinste unter allen von M aus nach den Punkten der Fläche S gezogenen Radienvectoren ist. Wählt man nun δ genügend gross, so hat man

$$\delta - u_1 < r < \delta + u_1,$$

folglich auch

$$\log(\delta - u_1) < \log r < \log(\delta + u_1);$$

multiplicirt man dies mit $2\varrho dS$ und integrirt, so ergiebt sich

$$m \log(\delta - u_1) < -U < m \log(\delta + u_1);$$

folglich

$$\frac{m \log(\delta - u_1)}{\log \delta} < \frac{-U}{\log \delta} < \frac{m \log(\delta + u_1)}{\log \delta}.$$

Für $\delta = \infty$ gehen die beiden Verhältnisse

$$\frac{\log(\delta - u_1)}{\log \delta} \text{ und } \frac{\log(\delta + u_1)}{\log \delta}$$

in 1 über; man hat daher für diesen Fall:

$$\frac{-U}{\log \delta} = m.$$

Nun war in § 27 bewiesen worden, dass

$$1 - \frac{u_1}{r_1} < \frac{\delta \cos(\delta r)}{r} < 1 + \frac{u_1}{r_1},$$

woraus durch Multiplication mit $2\varrho dS$ und Integration folgt

$$m\left(1 - \frac{u_1}{r_1}\right) < p\delta \cos(p\delta) < m\left(1 + \frac{u_1}{r_1}\right).$$

Für $\delta = \infty$ ist aber $\frac{u_1}{r_1} = 0$; folglich wird $p\delta \cos(p\delta) = m$. Zugleich ist aber auch $\cos(p\delta) = 1$; denn die Richtungen aller Kräfte, mit denen die Elemente der Masse m den Punkt M anziehen und die Richtung ihrer geometrischen Summe $\overline{p}$ fallen alle in die Richtung MO.

42. Aus § 61 der Einleitung folgt, dass das logarithmische Potential $U = -2\int\varrho \log(r)dS$ eine thermometrische Function für jeden ausserhalb der Masse $m = 2\int\varrho dS$ gelegenen Punkt ist; dass es aber für einen inneren Punkt diese Eigenschaft verliert. Man hat allgemein

$$\Delta_2 U = -4\pi\varrho\varepsilon, \tag{a}$$

worin für einen äusseren Punkt $\varepsilon = 0$ und für einen inneren $\varepsilon = 1$ zu setzen ist, während man für einen Punkt auf der Begrenzung der Fläche S für ε eine beliebige Zahl zwischen den Grenzen 0 und 1 wählen kann. Die Gleichung (a) kann zu einer Bestimmung des Potentials U a posteriori dienen. Zu diesem Zwecke wollen wir den folgenden, von Lejeune-Dirichlet aufgestellten Satz beweisen.

Gesetzt, die Function U' und ihr Differentialparameter erster Ordnung p' bleiben für jeden Punkt M einer Ebene S endlich, continuirlich und eindeutig; für einen Punkt M aber, der unendlich weit entfernt ist von einem beliebig in endlicher Entfernung von den Punkten der Fläche S gewählten Punkte O (so dass $MO = \delta$ unendlich gross ist) sollen U' und p' den Bedingungen

$$\frac{-U'}{\log\delta} = m,\quad p'\cos(p'\delta)\delta = m$$

genügen. Ausserdem bestehe für jeden ausserhalb der Masse m befindlichen Punkt M die Gleichung $\Delta_2 U' = 0$, für jeden innerhalb der Masse gelegenen Punkt die Gleichung $\Delta_2 U' = -4\varrho\pi$ und für jeden Punkt auf der Begrenzung der Fläche S die Bedingung, dass die Grösse $\Delta_2 U'$ nicht unendlich wird. Unter diesen Voraussetzungen ist U' entweder das logarithmische Potential $U = -2\int\varrho\log(r)dS$ selbst oder unterscheidet sich von ihm nur durch eine Constante.

Beweis. Wir setzen $U' - U = \varphi$ und suchen nun die Function φ zu bestimmen. Da für jeden äusseren und inneren

Punkt die Bedingung $\Delta_2 U' = \Delta_2 U$ erfüllt ist, so hat man für alle diese Punkte $\Delta_2 \varphi = 0$. Mithin ist die Function φ ausserhalb und innerhalb der Masse m eine thermometrische Function; für die Punkte der Begrenzung dieser Masse braucht sie es nicht zu sein.

Da nun

$$\frac{-U}{\log \delta} = m, \quad \frac{-U'}{\log \delta'} = m, \quad \text{für } \delta = \infty,$$

so ist $\frac{\varphi}{\log \delta} = 0$ für $\delta = \infty$. Dies zeigt, dass die Function φ für ein unendlich grosses δ weder einen unendlich grossen Werth von derselben Ordnung wie $\log \delta$ noch einen von derselben Ordnung wie δ^n (für $n > 0$) annehmen kann. Daher kann φ nur eine endliche Grösse sein.

Bezeichnet $\overline{q}$ den Differentialparameter erster Ordnung der Function φ, so ist $\overline{q} = \overline{p'} - \overline{p}$; folglich ist

$$q \cos (q\delta)\delta = p' \cos (p'\delta)\delta - p \cos (p\delta)\delta.$$

Für $\delta = \infty$ hat man $p' \cos (p'\delta)\delta = m$ und $p \cos (p\delta)\delta = m$, folglich auch $q \cos (q\delta)\delta = 0$. Aus Formel (58) § 63 der Einleitung erhält man, wenn man $\varrho = \varphi$ und $\overline{p'} = \overline{p} = \overline{q}$ setzt, die Gleichung

$$\int q^2 dS + \int \varphi \Delta_2 \varphi \, dS = \int \varphi q \cos (qn) ds, \tag{b}$$

worin die Integrationen nach dS sich über eine beliebige Fläche S erstrecken, die Integration nach ds aber über die Begrenzung s dieser Fläche; dabei bedeutet n die Richtung der äusseren Normale dieser Begrenzung.*) Da nun $\Delta_2 \varphi = 0$ ist

*) Wir halten es für nicht überflüssig, die Gleichungen (a) und (b) direct zu beweisen, wobei wir von der gewöhnlich angenommenen Definition des Differentialparameters zweiter Ordnung $\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ ausgehen, worin x und y die geradlinigen rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes M in der Ebene sind. Es seien φ und ϱ zwei Functionen dieses Punktes, $\overline{p}$ und $\overline{p'}$ ihre Differentialparameter erster Ordnung. Da nun $dS = dx dy$ und

$$\frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} = \varrho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

ist, so hat man:

für jeden Punkt M mit Ausnahme der Punkte der Begrenzung der Masse m, so bleiben, wenn in der Fläche S Punkte dieser Begrenzung liegen, nur die auf diese Punkte bezüglichen

$$\int \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} dxdy + \int \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} dxdy =$$
$$\int \varrho \Delta_2 \varphi dS + \int \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dS;$$

die Formel (8) § 5 der Einleitung giebt aber

$$\int \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} dxdy + \int \frac{\partial\left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} dxdy = \int \varrho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(ny)\right] ds,$$

wo n die äussere Normale der Begrenzung der Fläche S bedeutet und die Integration nach ds über die ganze Begrenzung auszudehnen ist. Nach einer Eigenschaft der Parameter erster Ordnung hat man ferner

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = pp' \cos(pp') = \overline{pp'} \text{ und}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(ny) = p\cos(pn); \text{ folglich wird:}$$
$$\int \varrho \Delta_2 \varphi dS + \int \overline{pp'} dS = \int \varrho p \cos(pn) ds. \tag{A}$$

Hierdurch ist die Formel (58) § 63 der Einleitung für den speciellen Fall, dass die Fläche S eine Ebene ist, bewiesen. Setzt man in Formel (A) $\varrho = 1$ und $\varphi = U = -\int \log(r) dm$, so folgt

$$\int \Delta_2 U dS = \int p \cos(pn) ds;$$

nun ist aber $p \cos(pn) = -\int \frac{\cos(rn)}{r} dm$; daher wird

$$\int p \cos(pn) ds = -\int dm \int \frac{\cos(rn) ds}{r}.$$

Integrirt man über die Begrenzung s, so erhält man $\int \frac{\cos(rn) ds}{r} = 0$, wenn dm ausserhalb der Fläche S liegt, und $\int \frac{\cos(rn) ds}{r} = 2\pi$, wenn dm in der Fläche S liegt. Daher ist $\int \Delta_2 U dS = 2\pi\mu$, wo μ der innerhalb S gelegene Theil der Masse m ist. Dividirt man dies durch S und lässt beide Dimensionen der Fläche S sich der Null nähern, so findet man $\Delta_2 U = -2\pi \cdot \lim \frac{\mu}{S} = -4\pi\varrho$, wenn der Punkt M innerhalb der Masse m liegt. Für einen Punkt auf der Begrenzung hat man $\Delta_2 U = -4\pi\varrho\varepsilon$, wo $0 < \varepsilon < 1$. Um auf Gleichung (b) zu gelangen, hat man nur in Gleichung (A) zu setzen: $\varrho = \varphi$, $\overline{p} = \overline{p'} = \overline{q}$.

Elemente in dem Integrale $\int \varphi \Delta_2 \varphi dS$ zurück. Der von den entsprechenden Elementen dS eingenommene Raum hat aber eine unendlich kleine Dimension; er verschwindet also zugleich mit dieser Dimension; folglich verschwindet auch der entsprechende Theil des Integrals $\int \varphi \Delta_2 \varphi dS$. Man hat daher in jedem Falle $\int \varphi \Delta_2 \varphi dS = 0$; dadurch geht Gleichung (b) über in

$$\int q^2 dS = \int \varphi q \cos(qn) ds. \qquad (c)$$

Dehnen wir hier die Integration (c) nach dS über die Fläche eines Kreises vom Radius $MO = \delta$, dessen Centrum in O ist, aus. Bezeichnet ω den Winkel, welchen die Richtung von OM mit einer beliebigen durch O gehenden Axe einschliesst, so hat man $ds = \delta d\omega$, wodurch die Gleichung (c) übergeht in

$$\int q^2 dS = \int \varphi q \cos(qn) \delta \cdot d\omega, \qquad (d)$$

wo die Integration nach $d\omega$ sich über einen Kreis vom Radius 1 erstreckt. Wie oben bewiesen wurde, bleibt die Function φ für $\delta = \infty$ endlich, während $q \cos(qn)\delta$ in Null übergeht. Dadurch wird die rechte Seite der Gleichung (d) zu Null; man hat also $\int q^2 dS = 0$, wo die Integration sich über die ganze Ebene erstreckt; dazu ist aber erforderlich, dass in jedem Punkte dieser Ebene $q = 0$ ist. Dies bedeutet, dass die Function φ in jedem Punkte der Ebene einen constanten Werth hat und dass $\overline{p'} = \overline{p}$ ist. Es ist also $U' = U + \varphi$, wo φ eine Constante bedeutet; die Anziehungskraft p ist der Differentialparameter erster Ordnung der Function U'.

43. Wir wollen nun diesen Satz anwenden, um die Kraft zu bestimmen, mit welcher ein Punkt M von der Masse m desjenigen Flächenraumes angezogen wird, der von zwei concentrischen Kreisen von den Radien R und R' eingeschlossen wird; dabei sei $R' < R$ und die Dichtigkeit 2ϱ nur von dem Abstande des betreffenden Punktes vom Mittelpunkte O der Kreise abhängig.

Im vorliegenden Falle kann die Function U nur von dem Abstande r des Punktes M vom Mittelpunkte O abhängig sein. Da für jeden ausserhalb der Masse m liegenden Punkt $\Delta_2 U = 0$ ist, so ist die Function U ausserhalb des Flächenraumes m die dem thermometrischen Parameter r entsprechende thermometrische Function. Daher muss sie nach § 58 die Gestalt

$$U = A \log r + B$$

haben, wo A und B Constante bedeuten. Für $r = \infty$ muss die Bedingung $\frac{-U}{\log r} = m$ erfüllt sein; daher ist $A = -m$, also:

$$U = -m \log r + B.$$

Der Differentialparameter dieser Function ist $p = \frac{m}{r}$ und fällt in die Richtung des Radiusvectors r, hat aber den entgegengesetzten Sinn, nämlich von M nach O. Man sieht hieraus, dass *die Masse m einen in dem unbegrenzten, sie umgebenden Raume befindlichen Punkt M ebenso anzieht, wie ein einziger im Centrum O liegender Punkt von der Masse m, nämlich umgekehrt proportional der ersten Potenz des Abstandes OM.*

Liegt der Punkt M innerhalb des Kreises R', so stellt sich das Potential U wieder unter der Gestalt $A \log r + B$ dar; doch hat man in diesem Falle $A = 0$ zu setzen. Der Differentialparameter erster Ordnung $\pm \frac{A}{r}$ dieser Function ist nämlich die anziehende Kraft, und diese wird zu Null für einen in das Centrum O fallenden Punkt M, weil dann alle die sie zusammensetzenden Elementarkräfte offenbar paarweise gleich und entgegengesetzt sind; dazu ist aber erforderlich, dass $A = 0$ sei. Folglich ist im vorliegenden Falle $U = B$, d. h. das Potential U hat für alle Punkte der Kreisfläche vom Radius R' einen constanten Werth. Daher ist die anziehende Kraft p für jeden solchen Punkt gleich Null. *Die Masse m übt also auf die Punkte der Fläche des inneren Kreises (R') gar keine Wirkung aus.*

Betrachten wir endlich den Fall, dass der Punkt M in der Masse m selbst gelegen ist. Dann ist $\Delta_2 U = -4\pi\varrho$; da nun U von der Variablen r allein abhängt, so hat man nach Formel (20) § 50 der Einleitung:

$$\Delta_2 U = \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} + \frac{d^2 U}{dr^2};$$

folglich ist:

$$\frac{1}{r}\frac{dU}{dr} + \frac{d^2 U}{dr^2} = -4\pi\varrho.$$

Multiplicirt man dies mit r und integrirt zwischen den Grenzen R' und $r = OM$, so folgt:

$$r\frac{dU}{dr} - \left(r\frac{dU}{dr}\right)_{R'} = -4\pi\int_{R'}^{r}\varrho r\,dr, \qquad (A)$$

wo $\left(r\frac{dU}{dr}\right)_{R'}$ der Werth der Function $r\frac{dU}{dr}$ für $r = R'$ ist. Da der Werth von U für alle Punkte der Fläche des Kreises (R') constant ist, so muss für alle diese Punkte $\frac{dU}{dr} = 0$ sein. Denselben Werth hat aber $\frac{dU}{dr}$ auch für $r = R'$; folglich ist $\left(r\frac{dU}{dr}\right)_{R'} = 0$. Der Werth des Integrals $4\pi\int_{R'}^{r}\varrho r\,dr$ ist der zwischen dem Kreise (R') und dem ihm concentrischen Kreise vom Radius $r = MO$ eingeschlossene Theil der Masse m. Bezeichnet man diesen Theil der Masse mit m', so folgt aus Gleichung (A):

$$r\frac{dU}{dr} = -m',$$

woraus man erhält $-\frac{dU}{dr} = \frac{m'}{r}$. Nun ist aber $-\frac{dU}{dr}$ gleich der anziehenden Kraft p; folglich ist $p = \frac{m'}{r}$. *Der Punkt M wird also nur von demjenigen Theile der Masse m angezogen, der innerhalb eines mit dem Radius OM beschriebenen Kreises enthalten ist; dabei geschieht die Anziehung gerade so, als ob diese ganze Masse im Centrum O concentrirt wäre.*

Die in diesem § bewiesenen Sätze sind analog den Sätzen des § 26, die sich auf die Anziehung eines Punktes durch Kugelschichten nach dem Newton'schen Gesetze beziehen.

44. Das Potential $U = \int\frac{dm}{r}$ der Resultante aller Kräfte, mit denen die Elemente einer Masse m einen Punkt M nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, hatten wir schon in § 62 der Einleitung untersucht; wir hatten dort gesehen, dass dasselbe für jeden ausserhalb der Masse m liegenden Punkt M eine thermometrische Function ist, dass es aber diese

Eigenschaft für einen inneren Punkt nicht besitzt. Allgemein kann man schreiben

$$\Delta_2 U = -4\pi\varrho\varepsilon, \tag{a}$$

wo im Falle eines äusseren Punktes $\varepsilon = 0$, im Falle eines inneren Punktes $\varepsilon = 1$ und im Falle eines Punktes auf der Oberfläche der Masse $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ zu setzen ist. Die Gleichung $\Delta_2 U = 0$ wurde von Laplace, die Gleichung $\Delta_2 U = -4\pi\varrho$ aber von Poisson aufgestellt. Die Gleichung (a) kann zur Bestimmung des Potentials a posteriori dienen, wenn man von dem folgenden Satze von Lejeune-Dirichlet ausgeht.

Gesetzt, die Function U' des Punktes M im Raume und ihr Differentialparameter erster Ordnung P' seien endlich, continuirlich und eindeutig im ganzen Raume; wählt man nun einen Punkt O in endlicher Entfernung von den Punkten der Masse m und genügen die Functionen U' und P' für einen in unendlicher Entfernung $MO = \delta$ von O gelegenen Punkt M den Bedingungen

$$U'\delta = m, \quad P' \cos(P'\delta)\delta^2 = m;$$

sind ferner für einen ausserhalb der Masse m befindlichen Punkt M die Laplace'sche Gleichung $\Delta_2 U' = 0$, für einen inneren die Poisson'sche $\Delta_2 U' = -4\pi\varrho$ erfüllt und wird für einen Punkt auf der Oberfläche der Masse $\Delta_2 U'$ nicht unendlich, so ist U' das Potential $U = \int \frac{dm}{r}$.

Beweis. Setzen wir $U' - U = \varphi$ und suchen wir die Function φ zu bestimmen. Da nach der Voraussetzung für $\delta = \infty$ die Relation $U'\delta = m$ gilt und da nach § 27 auch $U\delta = m$ ist, so muss für $\delta = \infty$ jedenfalls $\varphi\delta = 0$ sein. Bedeutet $\overline{Q}$ den Differentialparameter erster Ordnung der Function φ, so hat man $\overline{Q} = \overline{P'} - \overline{P}$, folglich ist:

$$Q \cos(Q\delta)\delta^2 = P' \cos(P'\delta)\delta^2 - P\cos(P\delta)\delta^2.$$

Nun ist für $\delta = \infty$ nach Voraussetzung $P' \cos(P'\delta)\delta^2 = m$ und nach § 27 wird $P\cos(P\delta)\delta^2 = m$; folglich ist $Q\cos(Q\delta)\delta^2 = 0$.

Weil $\Delta_2 U$ und $\Delta_2 U'$ für jeden inneren und äusseren Punkt M gleiche Werthe haben, so muss $\Delta_2\varphi = 0$ sein in dem ganzen Raume mit Ausnahme der Punkte der Oberfläche der Masse m, wo $\Delta_2\varphi$ zwar von Null verschieden, aber nicht

unendlich gross sein kann. Setzt man in Formel (68) § 65 der Einleitung $\varrho = \varphi$, $\overline{P} = \overline{Q}$, $\overline{P'} = \overline{Q}$, so wird dieselbe

$$\int Q^2 dV + \int \varphi \Delta_2 \varphi \, dV = \int \varphi Q \cos(Qn) \, dS, \qquad (b)$$

wo sich die Integration nach dV über ein beliebiges Volumen V und die Integration nach dS über die Oberfläche S dieses Volumens erstreckt. Da für alle ausserhalb oder innerhalb der Masse m befindlichen Punkte $\Delta_2 \varphi = 0$ ist, so verbleiben in dem Integrale $\int \varphi \Delta_2 \varphi dV$ nur die Elemente, welche sich auf die Punkte der Oberfläche von m beziehen. Da nun der diese Elemente dV enthaltende Raum eine unendlich kleine Dimension hat und $\Delta_2 \varphi$ in diesem Raume nicht unendlich gross werden kann, so verschwindet der übrig bleibende Theil des Integrals gleichfalls.

Wir erstrecken nun die Integration über eine Kugel vom Radius δ, deren Centrum ein in endlicher Entfernung von m liegender Punkt O ist. Dann ist $\cos(Qn) = \cos(Q\delta)$, $dS = \delta^2 d\sigma$, wo $d\sigma$ das Element einer concentrischen Kugel-Oberfläche vom Radius 1 ist. Daher wird

$$\int Q^2 dV = \int \varphi Q \cos(Q\delta) \, \delta^2 d\sigma$$

oder

$$\int Q^2 dV = \frac{1}{\delta} \int \alpha \beta \, d\sigma,$$

wo $\varphi \delta = \alpha$ und $Q \cos(Q\delta) \, \delta^2 = \beta$ gesetzt ist.

Wie oben bewiesen, wird $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ für $\delta = \infty$; mithin ist das über das Volumen einer Kugel von unendlich grossem Radius ausgedehnte Integral $\int Q^2 dV$ gleich Null. Es ist also für jeden Punkt eines nach drei Dimensionen unendlich grossen Raumes $Q = 0$. Dazu ist aber erforderlich, dass die Differenz $\varphi = U' - U$ in dem ganzen Raume einen constanten Werth habe. Da man aber für $\delta = \infty$ immer $\varphi = 0$ hat, so muss für jeden Punkt des Raumes $\varphi = 0$ sein; folglich ist $U' = U$ für jeden Punkt des Raumes, w. z. b. w.*)

---

*) Wir wollen die Gleichungen (a) und (b) noch beweisen, indem wir von der gewöhnlichen Definition des Differentialparameters zweiter Ordnung $\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ ausgehen, wobei x, y, z geradlinige,

45. Wir wollen nun den obigen Satz benutzen, um das Problem des § 28 von der Anziehung eines Punktes M durch eine Kugelschicht zu lösen, wobei die Dichtigkeit ϱ der Schicht nur eine Function des Abstandes des betreffenden Punktes von dem Centrum O der die Schicht begrenzenden concentrischen Kugelflächen ist.

---

rechtwinklige Coordinaten sind. Es seien φ und ϱ zwei Functionen dieser Variablen und $\overline{P}$ und $\overline{P'}$ deren Differentialparameter erster Ordnung. Da nun

$$\frac{\partial\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}{\partial z}$$
$$=\varrho\Delta_2\varphi+\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varrho}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varrho}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

und $dV=dx\,dy\,dz$ ist, so folgt

$$\int\frac{\partial\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}dxdydz+\int\frac{\partial\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y}dxdydz+\int\frac{\partial\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}{\partial z}dxdydz$$
$$=\int\varrho\Delta_2\varphi\,dV+\int\overline{PP'}\,dV.$$

Nach Formel (14) § 6. der Einleitung reducirt sich die linke Seite dieser. Gleichung auf

$$\int\varrho\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(nz)\right]dS=\int\varrho P\cos(Pn)\,dS,$$

wo n die äussere Normale des Elementes dS der Oberfläche des Volumens V bedeutet. Folglich wird:

$$\int\varrho\Delta_2\varphi\,dV+\int\overline{PP'}\,dV=\int\varrho P\cos(Pn)\,dS. \qquad (A)$$

Dies ist die Gleichung (68) § 65 der Einleitung. Setzt man in derselben $\varrho=1$, $\varphi=U$, so ergiebt sich

$$\int\Delta_2 U\,dV=\int P\cos(Pn)\,dS;$$

nun ist aber $P\cos(Pn)=-\int\frac{dm}{r^2}\cos(rn)$; daher wird

$$\int\Delta_2 U\,dV=-\int dm\int\frac{\cos(rn)}{r^2}\,dS.$$

Hierin ist $\int\frac{\cos(rn)\,dS}{r^2}=0$, wenn das Element dm ausserhalb des Volumens V liegt, und es ist $\int\frac{\cos(rn)}{r^2}dS=4\pi$, wenn dm in dem Vo-

Es seien R' und R die Radien dieser Kugeln, und zwar sei $R' < R$. Das Potential U kann offenbar nur eine Function des Abstandes $OM = r$ des angezogenen Punktes M von dem Centrum O sein; daher ist r (vergl. § 59 der Einleitung) ein thermometrischer Parameter und das Potential U dessen thermometrische Function. Dasselbe hat daher die Form

$$U = \frac{A}{r} + B,$$

wo A und B constant sind. Liegt der Punkt M in dem die Masse m umgebenden unbegrenzten Raume, so wird das Potential U für $r = \infty$ zu Null, und zwar so, dass $Ur = m$ wird. Man hat daher $B = 0$ und $A = m$ zu setzen, so dass $U = \frac{m}{r}$ wird. Dies zeigt, dass das Potential der Anziehung durch die Schicht gleich ist dem Potential der Anziehung durch die im Centrum der Schicht concentrirt gedachte Masse m. Liegt dagegen der Punkt M in der Höhlung der Schicht, so muss das Potential U für $r = 0$ einen endlichen Werth haben; es muss also $A = 0$ sein. Folglich ist jetzt $U = B$, d. h. das Potential hat für alle Punkte der Höhlung constanten Werth, so dass die anziehende Kraft P in jedem Punkte der Höhlung gleich Null ist. Nehmen wir endlich an, der Punkt M liege in der Masse m. Dann hat man nach Formel (a) S. 229 und nach Formel (32) der Einleitung:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d\left(r^2 \frac{dU}{dr}\right)}{dr} = -4\pi\varrho.$$

Multiplicirt man dies mit $r^2 dr$ und integrirt von R' bis r, so folgt:

---

lumen V liegt. Daher hat man $\int \Delta_2 U dV = -4\pi\mu$, wenn μ der in V enthaltene Theil der Masse m ist. Dividirt man diese Gleichung durch V und lässt die drei Dimensionen von V gegen Null convergiren, so folgt $\Delta_2 U = 0$, wenn der Punkt M, auf den sich das Volumen V zusammenzieht, ausserhalb m liegt. Im Falle eines inneren Punktes findet man $\Delta_2 U = -4\pi\varrho$ und im Falle eines Punktes auf der Oberfläche von m hat man $\Delta_2 U = -4\pi\varrho\varepsilon$, wo ε zwischen 0 und 1 liegt. Hiermit ist Gleichung (a) bewiesen. Setzt man $\varrho = \varphi$, $\overline{P} = \overline{P}' = \overline{Q}$, so erhält man aus Formel (A) auch die Formel (b).

$$r^2\frac{dU}{dr}-\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)_{R'}=-\int\limits_{R'}^{r}4\pi\varrho r^2dr,$$

wo $\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)_{R'}$ der Werth der Function $r^2\frac{dU}{dr}$ für $r=R'$ ist, d. h. auf der die Schicht von Innen begrenzenden Kugel. Nun ist aber für jeden Punkt im Innern dieser Kugel $\frac{dU}{dr}=0$, und $\frac{dU}{dr}$ kann keine discontinuirliche Function sein. Daher ist für $r=R'$ gleichfalls $\frac{dU}{dr}=0$. Man sieht leicht, dass das Integral $\int\limits_{R'}^{r}4\pi\varrho r^2dr$ derjenige Theil der Masse m ist, der zwischen den Kugeln von den Radien R' und $r=OM$ enthalten ist. Bezeichnet man dieselbe mit m', so hat man

$$r^2\frac{dU}{dr}=-m',$$

woraus folgt: $-\frac{dU}{dr}=\frac{m'}{r^2}$. Dies zeigt, dass bei der Anziehung nur die Masse m' wirkt, und zwar so, als ob sie im Mittelpunkte der Schicht concentrirt wäre.

In der Abhandlung von Lejeune-Dirichlet: „Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène," findet man einen Beweis a posteriori dafür, dass der in § 31 abgeleitete Ausdruck (31) wirklich das Potential der Anziehung eines Punktes durch ein Ellipsoid ist, dessen Dichtigkeit entweder eine Function von Θ^2 oder constant ist.

Anziehung nach dem Newton'schen Gesetze durch Massen, die auf Flächen vertheilt sind.

46. In der mathematischen Physik hat man nach dem Newton'schen Gesetze wirkende Anziehungen und Abstossungen zu untersuchen, die von Massen herrühren, welche über ebene oder krumme Oberflächen vertheilt sind. Eine solche Massenvertheilung kann man sich folgendermassen vorstellen.

Man denke sich eine unendlich dünne Schicht (S, S'), die von einer gegebenen Fläche S und einer anderen, überall un-

endlich wenig von ihr abstehenden Fläche S' eingeschlossen ist, d. h. es soll der zwischen S und S' liegende Abschnitt ε einer jeden Normale der Fläche S eine unendlich kleine Grösse sein. Ist S eine geschlossene Fläche, so ist auch S' geschlossen; ist S von einer Curve s begrenzt, so nimmt man, um die Schicht vollständig zu begrenzen, ausser S und S' noch eine geradlinige Fläche an, deren Erzeugende die in den Punkten von s errichteten Normalen der Fläche S sind. Das Volumen einer solchen Schicht (S, S') lässt sich in Differentialelemente εdS zerlegen, welche die Gestalt eines Cylinders haben, dessen Basis ein Element dS der gegebenen Fläche von zwei unendlich kleinen Dimensionen und dessen Höhe der Abschnitt ε der in einem beliebigen Punkte von dS errichteten Normale ist. Gesetzt nun, die Schicht enthalte eine gewisse Masse m, und es sei ϱ die Dichtigkeit eines Elementes dm dieser Masse von dem Volumen εdS; dann ist $dm = \varrho\varepsilon dS$. Man kann aber die Masse m auch als über die Fläche S vertheilt ansehen, und zwar derart, dass das dem Flächenelemente dS zukommende Massenelement dm die Dichtigkeit $h = \varrho\varepsilon$ hat. Ist die Dichtigkeit ϱ, die man die Volumendichtigkeit nennen kann, auf der ganzen Ausdehnung der Schicht (S, S') eine endliche Grösse, so ist die Flächendichtigkeit derselben Masse, nämlich die Grösse $h = \varrho\varepsilon$, wegen des unendlich kleinen Factors ε unendlich klein und wird für $\varepsilon = 0$ zu Null. Denkt man sich dagegen eine so dichte Masse m, dass die Dichtigkeit ϱ für unendlich kleine ε einen so grossen Werth hat, dass $h = \varrho\varepsilon$ nicht unendlich klein wird, so nähert sich h, wenn ε gegen die Null convergirt, einer gewissen Grenze, die nicht gleich Null ist. Dieser Grenzwerth ist die Dichtigkeit der ideellen Vertheilung der Masse m auf der Fläche S, d. h. die Flächendichtigkeit.

Wenn eine beliebige Vertheilung der Masse m auf einer Fläche S gegeben ist, so kann man dieselbe auf verschiedene Weise durch eine Vertheilung derselben Masse in dem Volumen einer Schicht ersetzen, die von der Fläche S und einer ihr sehr nahen Fläche S' eingeschlossen ist. Ist nämlich der Werth $h = \varrho\varepsilon$ für jeden Punkt der Fläche S gegeben, so stellt eine beliebig gewählte Function ϱ, die in jedem Punkte

der Fläche einen sehr grossen Werth hat, die Dichtigkeit der Massenvertheilung in der Schicht (S, S') von der Dicke $\varepsilon = \frac{h}{\varrho}$ dar. Wählt man für ϱ einen constanten Werth, so erhält man eine homogene Schicht, deren Dicke der Dichtigkeit h der Vertheilung auf der Fläche proportional ist. Man kann auch für die Dicke der Schicht ε eine beliebige Punktfunction wählen und nach ihr den entsprechenden Werth der Volumendichtigkeit $\varrho = \frac{h}{\varepsilon}$ bestimmen. Nimmt man z. B. ε als constant für alle Punkte der Fläche S an, so erhält man eine Schicht, die von zwei gleichweit von einander abstehenden Flächen eingeschlossen ist; die Volumendichtigkeit ϱ der Schicht ist dann der Flächendichtigkeit h proportional.

47. Gesetzt, es sei U das Potential der gleichzeitigen Wirkung der Masse der Schicht (S, S') und einiger äusserer Massen auf einen beliebigen Punkt M und $\overline{P}$ sei sein Differentialparameter. Ist die Dichtigkeit $h = \varrho\varepsilon$ der Vertheilung auf der Fläche S nicht unendlich klein, so wird $\overline{P}$ beim Uebergange des Punktes M von einer Seite der Schicht (S, S') auf die andere zu einer discontinuirlichen Function dieses Punktes. Hiervon kann man sich folgendermassen überzeugen.

Denken wir uns auf der Fläche S ein nach zwei Dimensionen unendlich kleines Element $\varDelta S$ und legen wir durch die Punkte seiner Begrenzungslinie die Normalen der Niveauflächen (U) in diesen Punkten. Diese Linien bilden eine gewisse Fläche σ, die aus der Fläche S' einen Theil $\varDelta S'$ ausschneidet. Wenn man nun auf den in der Fläche σ enthaltenen Theil der Schicht die in § 62 der Einleitung benutzte Formel von Gauss anwendet, so hat man

$$\int P \cos(Pn)\, dS = -4\pi\mu\,, \tag{1}$$

wo die Integration sich über die Oberfläche des betrachteten Schichtentheilchens erstreckt, während n die äussere Normale und μ die Masse dieses Schichtentheilchens bezeichnet. Da der Differentialparameter $\overline{P}$ für die Punkte der Fläche σ in die Tangentenebene dieser Fläche fällt, so hat man für alle Elemente derselben $\cos(Pn) = 0$ zu setzen. Daher bleiben auf der linken Seite der Gleichung (1) nur die auf $\varDelta S$ und

$\Delta S'$ bezüglichen Elemente zu berücksichtigen. Mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung kann man also setzen

$$P \cos(Pn)\, dS + P' \cos(P'n')\, dS' = -4\pi\mu, \tag{2}$$

wo P' und n' die Werthe von P und n für das Element dS' sind. Ebenso kann man mit Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung εdS als Ausdruck des Volumens der Masse μ ansehen, d. h. man kann $\mu = \varrho\varepsilon dS$ setzen. Ferner kann man $dS = dS'$ setzen und für n' die dem n entgegengesetzte Richtung wählen. Hiermit geht die Gleichung (2) in die folgende über:

$$P \cos(Pn) - P' \cos(P'n) = -4\pi h. \tag{3}$$

Diese Gleichung zeigt, dass die geometrische Differenz $\overline{P} - \overline{P'}$ keine unendlich kleine Grösse ist, so lange die Flächendichtigkeit h nicht unendlich klein ist; folglich erhält der Differentialparameter $\overline{P}$ einen endlichen Zuwachs, wenn der Punkt M von der einen Seite der Schicht (S, S') auf die andere übergeht. Da sich nun für diejenigen Massen, deren Elemente sich in endlicher Entfernung von einem auf S gewählten Punkt M befinden, die Anziehungskraft beim Uebergange des Punktes M von einer Seite der Fläche auf die andere unendlich wenig ändert, so kann man auf der linken Seite der Gleichung (3) annehmen, dass P und P' diejenigen Anziehungskräfte sind, die von der alleinigen Einwirkung der dem Punkte M benachbarten Massen auf diesen Punkt herrühren. Daher führt die Formel (3) auf den Satz:

Projicirt man die Kraft, mit welcher ein beliebiger Punkt M einer Fläche S von einer über diese Fläche vertheilten und von anderen, äusseren Massen angezogen wird, auf die Normale von S im Punkte M, so hat diese Projection einen doppelten Werth, je nachdem man den Punkt M als dem auf der einen oder dem auf der anderen Seite der Fläche S gelegenen Raume angehörig betrachtet. Die Differenz dieser beiden Werthe ist gleich $4\pi h$, wenn h die Dichtigkeit der Massenvertheilung auf der Fläche bedeutet. *)

*) Gauss beweist diesen Satz, indem er direct die Vertheilung der Masse auf der Fläche betrachtet, s. dessen Abhandlung: „Allgemeine

In dem speciellen Falle, dass für einen gewissen Punkt der Fläche $h = 0$ ist, hat man $P \cos(Pn) = P' \cos(P'n)$; in einem solchen Punkte ist also die Grösse $P \cos(Pn)$ nicht discontinuirlich. In denjenigen Punkten der Fläche S, wo h nicht gleich Null ist, können $\cos(Pn)$ und $\cos(P'n)$ nicht gleichzeitig zu Null werden; daher können $\overline{P}$ und $\overline{P'}$ in diesen Punkten die Fläche S nicht berühren. Ist h längs der Schnittlinie der Fläche S mit einer gewissen Niveaufläche (U) nicht gleich Null, so hat die Niveaufläche (U) infolge der Discontinuität des Parameters $\overline{P}$ in jedem Punkte dieser Linie zwei verschiedene Tangentenebenen; folglich hat sie längs dieser Linie eine Kante.

Es kann vorkommen, dass die Fläche S selbst eine Niveaufläche ist; dann sind $\overline{P}$ und $\overline{P'}$ zu ihr normal und haben zwei verschiedene Werthe in den Punkten, wo h nicht gleich Null ist. In Punkten der Fläche S, für welche die Tangentenebene unbestimmt wird, hat die Gleichung (3) keine Giltigkeit.

48. Ein Beispiel für die Vertheilung einer Masse in einer unmessbar dünnen Schicht oder auf einer Fläche bietet die Elektricität auf einem vollkommen guten Leiter, der von einem vollkommen nichtleitenden Medium umgeben ist; dabei kann die Elektricität frei oder unter der Einwirkung äusserer elektrischer Massen sein. Es sei K ein solcher Leiter, S die Gesammtheit aller geschlossenen, ihn begrenzenden Oberflächen, $U = \int \frac{dm}{r}$ das Potential der Wirkung aller im Leiter K und ausserhalb desselben befindlichen elektrischen Massen auf irgend einen Punkt M, dessen Abstand von einem Massenelement dm gleich r ist. Dabei können die Elemente dm positiv oder negativ sein; wir wollen bestimmen, dass die Elemente der sogenannten positiven Elektricität als positive Elemente gelten sollen. Es ist nicht nöthig, die Integration in $\int \frac{dm}{r}$ auch auf die im natürlichen Zustande befindliche Elektricität auszudehnen;

Lehrsätze in Beziehung auf im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkende Anziehungs- und Abstossungskräfte" (1840). Einen anderen Beweis findet man in der Abhandlung von Scheibner: „Ueber das Flächen-Potential" in Crelle's Journ., Bd. 54, S. 77.

denn für diese sind die Elemente $\frac{dm}{r}$ paarweise entgegengesetzt gleich. Ist der Punkt M mit der elektrischen Masse μ behaftet und ist $\overline{P}$ der Differentialparameter der Function U für diesen Punkt, so ist μP die Kraft, mit der die ganze elektrische Masse m auf die Masse μ wirkt. Dieselbe ist normal zu der Niveaufläche (U) und von entgegengesetztem oder demselben Sinne, wie $\overline{P}$, je nachdem μ zu der positiven oder negativen Elektricität gehört.

Befinden sich im Punkte M zwei verschiedenartige Massen μ und μ', so wirken auf dieselben zwei entgegengesetzte Kräfte μP und $\mu' P$. Liegt dabei der Punkt M innerhalb K in messbarer Entfernung von der Fläche S, so sind ausser diesen Kräften keine weiteren auf die Masse μ und μ' wirkenden Kräfte vorhanden. Ist P nicht gleich Null, so bringen die Kräfte $P\mu$ und $P\mu'$ die Massen μ und μ' in Bewegung. Die Folge davon ist eine in dem Leiter K stattfindende Zerlegung der natürlichen Elektricität und eine Bewegung der freien Elektricität.

Es kann der Fall vorkommen, dass, wie der Versuch zeigt, in dem Leiter K gar keine Bewegung der elektrischen Massen stattfindet; dann sagt man, die Elektricität befinde sich *im statischen Zustande.* In diesem Falle muss in jedem innerhalb K gelegenen Punkte M in messbarer Entfernung von der Fläche S immer $P = 0$ sein. Dagegen wird dann für einen auf dem Leiter in unmessbar kleiner Entfernung von seiner Oberfläche befindlichen Punkt M ausser der Kraft μP auf die Masse μ noch eine Kraft wirken, welche die Masse μ hindert von dem Leiter K in das ihn umgebende nicht leitende Medium zu entweichen. Hieraus folgt, dass es innerhalb des Leiters K in unmessbar kleinen Abständen von S noch eine gewisse Fläche S' giebt, die die Eigenschaft besitzt, dass für alle auf ihr selbst und innerhalb des von ihr begrenzten Raumes die Kraft $P = 0$ ist. Nimmt man innerhalb der Fläche S' irgend eine andere geschlossene Fläche S'' an und erstreckt das Integral $\int P \cos(Pn) dS''$ auf sie, wobei n die äussere Normale der Fläche bedeutet, so hat man wegen $P = 0$ die Relation

$$\int P \cos(Pn) dS'' = 0;$$

andererseits aber ist dieses Integral gleich dem Producte aus -4π in die innerhalb der Fläche S'' befindliche elektrische Masse (vergl. Formel (1)); folglich ist diese Masse gleich Null. Hieraus ergiebt sich, dass die Summe der elektrischen Massen, die sich innerhalb irgend eines Theiles des von der Fläche S' begrenzten Volumens befinden, gleich Null ist und dass also im Inneren von S' die Elektricität sich im natürlichen Zustande befinden muss. Man schliesst hieraus, dass, wenn ein Leiter K freie oder unter der Einwirkung äusserer Massen zerlegte Elektricität besitzt, dieselbe sich in einer unmessbar dünnen Schicht (S, S') befinden muss.

Ist ε die dem Elemente dS entsprechende Dicke der Schicht (S, S') und ϱ die Dichtigkeit der in dem Volumen εdS enthaltenen Masse, so ist $\varrho\varepsilon dS$ die Grösse dieser Masse; folglich ist die ganze Masse der Schicht durch das Integral $\int\varrho\varepsilon dS$ ausgedrückt, das über die ganze Oberfläche dS auszudehnen ist. Wegen der unendlichen Kleinheit der Dicke ε kann man die beiden Flächen S und S' als zusammenfallend und die elektrische Masse als über die Oberfläche S vertheilt ansehen, und zwar derart, dass in dem Elemente dS ihre Dichtigkeit $h = \varrho\varepsilon$ ist. Diese Dichtigkeit ist in einem Theile der Fläche S positiv, in einem anderen negativ, wenn die Schicht verschiedenartige Elektricitäten enthält.

Auf das Massenelement hdS wirkt die Kraft $PhdS$, die mit derjenigen Kraft im Gleichgewichte sein muss, welche die Masse hdS verhindert, von dem Leiter K in das isolirende Mittel zu entweichen. Dieser Widerstand hat die Richtung der Normale von dS (ähnlich dem Widerstande, welchen das eine Flüssigkeit enthaltende Gefäss dem Druck der Flüssigkeit auf die inneren Gefässwände entgegenstellt); da also die Kraft $hPdS$ die Richtung der äusseren Normale von S hat, so hat auch der Differentialparameter $\overline{P}$ diese Richtung. Bezeichnet man mit ds die Verschiebung eines Punktes M der Fläche S auf der Fläche selbst, so ist $\frac{dU}{ds} = P\cos(Pds) = 0$ für jeden Punkt der Fläche S und dies erfordert, dass U einen constanten Werth über die ganze Ausdehnung der Fläche S habe; die Fläche S ist daher eine der Niveauflächen (U).

Dies folgt auch daraus, dass S mit S', welches eine Niveaufläche ist, zusammenfällt und dass U in den Punkten der Fläche S eine continuirliche Function ist.*) Der constante Werth von U auf der Fläche S ist derselbe, wie für die Fläche S' und innerhalb des Leiters K.

Da auf der Fläche S' in jedem Punkte $P' = 0$ ist, so giebt Gleichung (3)

$$\pm P = -4\pi h;$$

dabei hat man links das Zeichen — zu nehmen, wenn h positiv und $+$, wenn h negativ ist; im ersten Falle ist $\overline{P}$ im Sinne der inneren, im zweiten Falle im Sinne der äusseren Normale gerichtet. Bedeutet dn die Verschiebung auf der inneren Normale, so hat man für beide Fälle:

$$h = -\frac{1}{4\pi}\frac{dU}{dn}. \tag{4}$$

Diese Formel drückt das Vertheilungsgesetz der Dichtigkeit der Elektricität auf der Oberfläche des Leiters K aus. Das Maass der elektrischen Kraft im Elemente dS ist:

$$\pm hPdS = 4\pi h^2 dS.$$

Ihr Verhältniss zu dem Flächenelemente dS ist $4\pi h^2$ und kann als Maass der elektrischen Spannung auf der Oberfläche des Leiters in dem gegebenen Punkte dienen. Diese Spannung ist also dem Quadrate der Dichtigkeit der elektrischen Vertheilung auf der Fläche S proportional.

49. Als Beispiel für die statische Elektricität auf einem Leiter in dem Falle, dass keine äusseren, die Elektricität des Leiters beeinflussenden elektrischen Massen vorhanden sind, kann die Vertheilung von gleichnamiger Elektricität in einer Schicht gelten, die von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden S und S' eingeschlossen ist, wenn dabei die Dichtigkeit h auf der Fläche S der entsprechenden Dicke der Schicht proportional ist, d. h. wenn die Dichtigkeit ϱ der Vertheilung in dem Volumen constant ist. Nach dem Newton'schen Satze (§ 28) übt eine solche Schicht auf die im Inneren und auf

---

*) Die Continuität von U folgt daraus, dass $P = \frac{dU}{dn}$ eine endliche Grösse ist.

der Oberfläche S' befindlichen Punkte gar keine Wirkung aus; eine der Bedingungen für die statische Elektricität ist also erfüllt. Um erkennen zu können, ob auch die übrigen Bedingungen erfüllt sind, wollen wir die Anziehung bestimmen, welche die Schicht auf einen, in Bezug auf das Ellipsoid S äusseren Punkt ausübt. Erinnern wir uns zu diesem Zwecke der Ausführungen des § 30, in welchem gezeigt wurde, wie man das Potential der Anziehung eines Punktes durch ein massives Ellipsoïd bestimmen kann, indem man diesen Körper in unendlich dünne Schichten zerlegt.

Es sei

$$\frac{\xi^2}{a_1} + \frac{\eta^2}{a_2} + \frac{\zeta^2}{a_3} = 1$$

die Gleichung des Ellipsoids (S). Setzen wir

$$\alpha^2 = a_1 + \lambda,\ \beta^2 = a_2 + \lambda,\ \gamma^2 = a_3 + \lambda,$$

wobei $\lambda > 0$ sein soll, und betrachten wir die Schicht, welche von den beiden ähnlichen unendlich nahen Ellipsoiden

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = \Theta^2,\quad \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = (\Theta + d\Theta)^2$$

eingeschlossen ist. In § 30 haben wir gesehen, dass, wenn $d_\Theta U$ das Potential der Wirkung ist, die eine solche Schicht auf einen äusseren Punkt M, d. h. auf einen ausserhalb des in dem Ellipsoid ($\Theta + d\Theta$) enthaltenen Raumes befindlichen Punkt ausübt, dann immer

$$d_\lambda\left(\frac{d_\Theta U}{\alpha\beta\gamma}\right) = 0$$

ist; also ist $\frac{d_\Theta U}{\alpha\beta\gamma}$ von der Variablen λ unabhängig. Es ist dies die Ausdehnung des Maclaurin'schen Satzes auf eine unendlich dünne Schicht. Gesetzt, die Schicht (SS') liege zwischen den Flächen

$$\frac{\xi^2}{a_1} + \frac{\eta^2}{a_2} + \frac{\zeta^2}{a_3} = 1 \text{ und } \frac{\xi^2}{a_1} + \frac{\eta^2}{a_2} + \frac{\zeta^2}{a_3} = (1 + d\Theta)^2;$$

denken wir uns nun eine andere Schicht ($S_1 S_1'$) von derselben Dichtigkeit ϱ, welche von den mit jenen confocalen Flächen

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_1} + \frac{y^2}{a_2+\lambda_1} + \frac{z^2}{a_3+\lambda_1} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_1} + \frac{y^2}{a_2+\lambda_1} + \frac{z^2}{a_3+\lambda_1} = (1 + d\Theta)^2$$

begrenzt ist. Der angezogene Punkt M befindet sich auf der zweiten von diesen Flächen. Bezeichnen wir das Potential der Einwirkung der ersten Schicht auf diesen Punkt M mit U und das Potential der Einwirkung der zweiten Schicht mit U_1, so ist nach dem eben bewiesenen Satze:

$$\frac{U}{\sqrt{a_1 a_2 a_3}} = \frac{U_1}{\sqrt{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}}. \tag{5}$$

Diese Gleichung besteht immer, wie klein auch $d\Theta$ sei, folglich auch für $d\Theta = 0$, d. h. wenn die Fläche S' mit S und S_1' mit S_1 zusammenfallen. Wählt man für die Dichtigkeit ϱ einen unendlich grossen Werth, so dass das Product $\varrho d\Theta$ endlich wird, so haben U und U_1 endliche Werthe.

Nehmen wir nun an, der Punkt M liege innerhalb der Fläche

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = \Theta^2.$$

In diesem Falle hat man nach Formel (24) § 30:

$$d_\lambda\left(\frac{d_\Theta U}{\alpha\beta\gamma}\right) = -\frac{2\pi\varrho\Theta d\Theta d\lambda}{\alpha\beta\gamma}.$$

Integrirt man dies nach λ von λ bis ∞, so folgt:

$$\left(\frac{d_\Theta U}{\alpha\beta\gamma}\right)_\lambda = 2\pi\varrho\Theta d\Theta\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\alpha\beta\gamma};$$

wendet man diese Formel auf die Schicht $(S_1 S_1')$ an, so ergiebt sich

$$\frac{U_1}{\sqrt{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}} = 2\pi\varrho d\Theta\int_{\lambda_1}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}},$$

worin das Potential U_1 sich auf einen innerhalb oder auf der Oberfläche von S_1 befindlichen Punkt $M(x, y, z)$ bezieht. Diese Formel gilt auch noch für $d\Theta = 0$; dann nimmt $\varrho d\Theta$ einen endlichen Werth q an und folglich wird:

$$U_1 = 2\pi q\sqrt{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}\int_{\lambda_1}^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}}. \tag{6}$$

Da U_1 von der Variablen λ_1 allein abhängt, so hat diese Function für alle Punkte der Fläche (S_1) denselben Werth.

Diese Fläche ist also eine Niveaufläche für die auf ihr vertheilte Masse. Die Formeln (5) und (6) ergeben den Ausdruck

$$U = 2\pi q \sqrt{a_1 a_2 a_3} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda)}} \tag{7}$$

für das Potential der Anziehung, welche die Masse der Fläche (S) auf einen ausserhalb des von ihr eingeschlossenen Raumes befindlichen Punkt M ausübt. Dieses Potential ist gleichfalls eine Function der Variablen λ_1 allein; daher ist (S_1), d. h. das durch den Punkt M gehende Ellipsoid (λ_1), eine Niveaufläche für die über die Fläche (S) vertheilte Masse.*) Die Kraft P, mit welcher diese Masse den Punkt M anzieht, ist deshalb normal zu der Fläche (S_1), und da U bei abnehmendem λ_1, d. h. bei Verschiebung des Punktes M nach dem Inneren der Fläche (S_1) wächst, so ist P nach dem Inneren dieser Fläche gerichtet. Nach der Regel über die Bestimmung des Differentialparameters erster Ordnung (s. Kinematik § 52) ergiebt sich

$$P = \frac{dU}{d\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dn},$$

wo dn die Normalverschiebung des Punktes M nach dem Inneren der Fläche (S_1) bedeutet. Bezeichnet man mit δ_1 das vom Mittelpunkte der Ellipsoide auf die Tangentenebene von (S_1) im Punkte M gefällte Perpendikel, so ist $\frac{d\lambda_1}{dn} = -2\delta_1$ (s. Kinem. § 56); folglich wird:

$$P = 4\pi q \delta_1 \cdot \frac{\sqrt{a_1 a_2 a_3}}{\sqrt{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)(a_3 + \lambda_1)}}. \tag{8}$$

Gelangt der Punkt M auf die Fläche (S), so hat man $\lambda_1 = 0$ zu setzen; in diesem Falle wird also

$$P = 4\pi q \delta, \tag{9}$$

wenn δ das vom Mittelpunkte des Ellipsoids (S) auf die Tangentenebene dieser Fläche im Punkte M gefällte Perpendikel ist.

*) Das Potential U ist die dem thermometrischen Parameter λ_1 entsprechende thermometrische Function; folglich ist (λ_1) eine isothermische Fläche. S. § 59 der Einleitung.

Man sieht leicht, dass $\delta . d\Theta$ die Dicke ε der Schicht (SS') im Punkte M ist; daher ist $q\delta = \lim \varrho d\Theta . \delta$ gleich dem Grenzwerth von $\varrho\varepsilon$, d. h. es ist dies die Dichtigkeit h der Vertheilung der Masse auf der Oberfläche des Ellipsoids S. Folglich hat man nach Formel (9) $P = 4\pi h$, was mit Formel (4) übereinstimmt.

Aus diesen Betrachtungen ersieht man, dass freie gleichnamige Elektricität, die auf einem Ellipsoid (S) so vertheilt ist, dass die Dichtigkeit der Vertheilung $h = q\delta$ ist, sich im statischen Zustande befindet, wenn keine äussere Elektricität auf sie wirkt. Die Dichtigkeit $h = q\delta$ ist proportional dem Perpendikel, das vom Mittelpunkte des Ellipsoids auf dessen Tangentenebene in dem dem h entsprechenden Punkte gefällt ist. Die elektrische Spannung in diesem Punkte ist $h^2 = q^2\delta^2$, also dem Quadrate des Perpendikels δ proportional. Im Scheitel des Ellipsoids ist δ gleich der entsprechenden Halbaxe; daher findet das Maximum der Spannung in den Endpunkten der grossen Axe und das Minimum in den Endpunkten der kleinen Axe statt. Im Falle eines verlängerten Rotationsellipsoids ist das Maximum der Spannung an den Polen, das Minimum längs dem Aequator. Das abgeplattete Ellipsoid zeigt die entgegengesetzte Erscheinung.

Die Grösse q hängt von der elektrischen Ladung, d. h. von der Masse m freier Elektricität auf dem Leiter ab. Das Volumen einer Schicht (SS') ist $4\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3} . d\Theta$, also ist $m = 4\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3} . \varrho d\Theta = 4\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3} . q$; hieraus folgt:

$$q = \frac{m}{4\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}}, \quad h = \frac{m\delta}{4\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}}.$$

Bei genügend grossen m und a_1 kann die Spannung h^2 im Endpunkte der grossen Axe $\sqrt{a_1}$ so gross werden, dass die Kraft $PhdS = 4\pi h^2 dS$ den Widerstand des isolirenden Mediums auf dem Element dS überwindet. Infolge dessen strömt die Elektricität von dS in das isolirende Medium über. Durch diese Störung des Gleichgewichts zwischen der Kraft Ph^2dS und dem Widerstande des isolirenden Mediums erklärt sich die Erscheinung der Elektricität auf Spitzen.

Die Formel (8) bestimmt die Wirkung der Masse der

Fläche (S) auf einen bezüglich des von (S) begrenzten Raumes äusseren Punkt M. In dieser Formel ist der Factor $4\pi q\delta_1$ die Kraft P, mit welcher der Punkt M von einer Masse angezogen wird, die auf der Oberfläche des mit S confocalen Ellipsoids S_1 derart vertheilt ist, dass die Dichtigkeit den Ausdruck $h_1 = q\delta_1 = h\frac{\delta_1}{\delta}$ hat. Kennt man also die Vertheilung auf *einem* Ellipsoide, so kann man die Vertheilung auf jedem ihm confocalen Ellipsoide finden. Die Kraft P, mit der die Masse der Fläche (S) auf einen äusseren Punkt M wirkt, hat die Richtung der Normale des Ellipsoids (S_1) in diesem Punkte. Nach einer bekannten Eigenschaft der confocalen Ellipsoide ist diese Normale die Axe eines Kegels zweiter Ordnung, dessen Erzeugende die vom Punkte M nach der Fläche (S) gezogenen Tangenten sind; sie ist aber auch die Axe eines Kegels, dessen Spitze in M und dessen Basis die Focalellipse

$$\frac{x^2}{a_1 - a_2} + \frac{y^2}{a_1 - a_3} = 1$$

ist.*)

Sind alle drei Axen des Ellipsoids S gleich, so geht diese Fläche in eine Kugel über. Dann ist δ der Radius der Kugel und δ_1 der Abstand des angezogenen Punktes vom Centrum; daher giebt die Formel (8):

$$P = \frac{4\pi q\delta^3}{\delta_1^2} = \frac{4\pi h\delta^2}{\delta_1^2}.$$

Hierin ist $4\pi\delta^2$ die Kugeloberfläche und $4\pi h\delta^2$ die auf ihr vertheilte Masse. Die Dichtigkeit h ist constant; daher kann man jene Masse als eine homogene, zwischen den beiden concentrischen Kugeln S und S' eingeschlossene Masse betrachten. Nach § 28 wirkt dieselbe auf einen äusseren Punkt so, als wäre sie im Mittelpunkte der Kugel S concentrirt.

---

*) Die Eigenschaft, dass die Kraft P die Richtung der Axe des ersten der beiden Kegel hat, ist von Poisson gefunden worden, s. dessen „Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène“, lu le 7 Oct. 1833, Mém. de l'Acad., T. XIII. Steiner bewies später diese Eigenschaft synthetisch. S. Crelle's Journ., Bd. 12 (1834), S. 141. Ein Beweis für diese Eigenschaft findet sich auch in der Abhandlung von Chasles, „Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince“. Journ. de l'École Polyt., 25me Cah.

50. Das Problem der Vertheilung der Elektricität auf Leitern in der Weise, dass sie sich im Gleichgewichtszustande befindet, gehört zu den interessantesten und zugleich schwersten. Die Hauptgrundlage zu seiner Lösung bilden die Green'schen Formeln, die wir in § 66 der Einleitung abgeleitet hatten. Wir wollen nun die wichtigsten Folgerungen zeigen, die sich aus ihnen ergeben.

Die Formel (73) § 66 der Einleitung

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\,\Delta_2\varphi\, dV + \frac{1}{4\pi}\left[\int\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dn}dS + \int\varphi\frac{1}{r^2}\cos(rn)\,dS\right] \quad (10)$$

giebt den Werth einer continuirlichen einwerthigen Function φ in jedem Punkte des von der geschlossenen Fläche S begrenzten Raumes V, wenn bekannt sind: 1) der Werth des Differentialparameters zweiter Ordnung $\Delta_2\varphi$ dieser Function für jeden Punkt des Raumes V, 2) der Werth der Function φ selbst für jeden Punkt der Fläche (S) und 3) der Werth der Projection ihres Differentialparameters erster Ordnung P auf die Normale der Fläche (S) in jedem Punkte der Fläche (S), d. h. die Grösse $\frac{d\varphi}{dn} = P\cos(Pn)$, wo n die Normale von dS ist. Dabei bedeutet in Formel (10) n die Richtung der äusseren Normale und r den Radiusvector, der das Flächenelement dS mit demjenigen Punkte verbindet, zu welchem der Werth von φ gehört; diesen Punkt werden wir mit M bezeichnen.

Ist φ in dem ganzen Raume V eine thermometrische Function, so ist $\Delta_2\varphi = 0$, folglich wird dann:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}P\cos(Pn)\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\varphi\frac{1}{r^2}\cos(rn)\,dS. \quad (11)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird zu Null für alle Punkte, die ausserhalb des Volumens V liegen, d. h. wenn r einen von einem äusseren Punkte M nach dS gezogenen Radiusvector bedeutet. Denn da in diesem Falle $\frac{1}{r}$ für die Punkte des Volumens V nicht unendlich gross wird, so kann man die Formel (69) § 65 der Einleitung anwenden und in ihr $\varrho = \frac{1}{r}$ setzen. Dadurch erhält man:

$$0 = \int \frac{1}{r} P \cos(Pn) dS + \int \varphi \frac{1}{r^2} \cos(rn) dS. \qquad (12)$$

51. *Lehrsatz von Green: Es seien U und U' zwei Functionen des Punktes M, die den folgenden Bedingungen genügen: 1) die Function U sei eindeutig, stetig, endlich und thermometrisch für alle Punkte eines durch eine Fläche S begrenzten Volumens V, und U' sei eine ebensolche Function für alle ausserhalb dieses Volumens befindlichen Punkte; 2) die Differentialparameter erster Ordnung P und P' dieser Functionen bleiben endlich und stetig in den entsprechenden Räumen; 3) für die Punkte der Fläche S haben die Functionen U und U' gleiche Werthe, ihre Parameter P und P' aber können nach Grösse und Richtung verschieden sein; 4) entfernt sich der Punkt M von der Fläche S ins Unendliche, so soll die Function U' einen unendlich kleinen Werth von derselben Ordnung wie $\frac{1}{r}$ annehmen, ihr Parameter P' aber einen unendlich kleinen Werth von derselben Ordnung wie $\frac{1}{r^2}$. Unter diesen Bedingungen kann man auf der Fläche S eine Masse derart vertheilen, dass die Function U das Potential der Kraft wird, mit welcher diese Masse einen beliebigen ausserhalb des Volumens V gelegenen Punkt anzieht, während die Function U' das Potential der Kraft ist, mit welcher dieselbe Masse einen in dem Volumen V befindlichen Punkt anzieht; dabei ist die Dichtigkeit der Vertheilung der Masse auf der Fläche (S) durch die folgende Formel ausgedrückt:*

$$h = \frac{1}{4\pi}\Big[P \cos(Pn) - P' \cos(P'n)\Big]. \qquad (13)$$

Zum Beweise dieses Satzes wenden wir zunächst die Formel (11) auf die Function U an, indem wir den Punkt M innerhalb S wählen; dadurch erhalten wir:

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} P \cos(Pn) dS + \frac{1}{4\pi} \int U \frac{1}{r^2} \cos(rn) ds. \qquad (14)$$

Dann wenden wir die Formel (12) auf die Function U' an, indem wir für den Radiusvector r den Pol M in demjenigen Punkte wählen, dem der vorstehende Werth von U entspricht; wir integriren dabei nach dS über die Fläche S und über die Oberfläche einer Kugel, deren Centrum in M ist und von

welcher die Fläche S vollständig eingeschlossen wird. Bezeichnet δ den Radius dieser Kugel und n' die Richtung der äusseren Normale von S, d. h derjenigen, die in Bezug auf den zwischen der Kugel und der Fläche S gelegenen Raum nach aussen gerichtet ist, so hat man nach Formel (12):

$$\int \frac{1}{r} P' \cos(P'n') dS +$$
$$\int U' \frac{1}{r^2} \cos(rn') dS + \delta \int P' \cos(P'\delta) d\sigma + \int U' d\sigma = 0;$$

hierin beziehen sich die beiden letzten Glieder auf die Oberfläche der Kugel vom Radius δ, und $d\sigma$ bedeutet das Element einer concentrischen Kugelfläche von einem Radius gleich 1. Für $\delta = \infty$ verschwinden diese beiden Glieder; denn P' wird nach der Voraussetzung unendlich klein von derselben Ordnung wie $\frac{1}{\delta^2}$ und U' unendlich klein von derselben Ordnung wie $\frac{1}{\delta}$. Vertauscht man in den übrigbleibenden Gliedern die Richtung von n' mit der entgegengesetzten Richtung n, so ist:

$$0 = \int \frac{1}{r} P' \cos(P'n) dS + \int U' \frac{1}{r^2} \cos(rn) dS.$$

Subtrahirt man diese Gleichung, nachdem man sie durch 4π dividirt hat, von der Gleichung (14) und beachtet, dass $U = U'$ für die Punkte der Fläche S wird, so folgt:

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \Big[P \cos(Pn) - P' \cos(P'n) \Big] dS.$$

Dies zeigt, dass für einen innerhalb der Fläche S befindlichen Punkt M die Function U das Potential einer Masse ist, die über die Fläche S in der Weise vertheilt ist, dass die Dichtigkeit der Masse des Elements dS

$$h = \frac{1}{4\pi} \Big[P \cos(Pn) - P' \cos(P'n) \Big]$$

ist. Wenden wir nun die Formel (11) auf die dem Punkte M entsprechende Function U' an, indem wir diesen Punkt so wählen, dass er ausserhalb des von der Fläche S eingeschlossenen Raumes liegt; wir erstrecken dabei die Integration nach dS über diese Fläche S und über die Oberfläche einer die

ganze Fläche S umfassende Kugel vom Radius δ und vom Centrum M.

Bezeichnet $d\sigma$ das Element einer concentrischen Kugelfläche vom Radius 1 und beachtet man, dass diejenige Normale von S, die in Bezug auf den Raum, in dem sich M befindet, die äussere Normale ist, den entgegengesetzten Sinn wie n hat, so folgt:

$$U' = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}P'\cos(P'n)dS - \frac{1}{4\pi}\int U'\frac{1}{r^2}\cos(rn)dS$$
$$+\frac{-1}{4\pi}\delta\int P'\cos(P'\delta)d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int U'd\sigma.$$

Für $\delta = \infty$ verschwinden die beiden letzten Glieder und daher wird

$$U' = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}P'\cos(P'n)dS - \frac{1}{4\pi}\int U'\frac{1}{r^2}\cos(rn)dS. \quad (15)$$

Lässt man endlich den Pol für r in demselben Punkte M und wendet die Formel (12) auf die innerhalb S gegebene Function U an, so hat man:

$$0 = \int\frac{1}{r}P\cos(Pn)dS + \int U\frac{1}{r^2}\cos(rn)dS.$$

Dividirt man diese Gleichung durch 4π und addirt sie zu Gleichung (15), so folgt, wenn man beachtet, dass für die Punkte der Fläche S wieder $U' = U$ ist:

$$U' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\Big[P\cos(Pn) - P'\cos(P'n)\Big]dS.$$

Dies zeigt, dass die Function U' das Potential der Kraft ist, mit welcher ein ausserhalb des von S umschlossenen Raumes befindlicher Punkt M von einer Masse angezogen wird, die auf der Fläche S derart vertheilt ist, dass die Dichtigkeit der Masse eines Elements dS durch die Formel (13) ausgedrückt ist.

52. Gesetzt, es sei S eine geschlossene Niveaufläche, die der Wirkung einer gewissen, theils ausserhalb, theils innerhalb S gelegenen Masse m angehört; ferner sei U_1 das Potential der Wirkung des inneren Theiles m_1 und U_2 das des äusseren Theiles auf einen beliebigen Punkt M. Die Summe $U_1 + U_2$ ist dann das Potential der Wirkung der ganzen Masse m auf denselben Punkt. Nach einer Eigenschaft der

Niveauflächen muss diese Summe für die ganze Ausdehnung der Fläche S einen gewissen constanten Werth A haben. Die Function $A - U_2$ genügt nun allen den Bedingungen, denen die Function U im vorigen § unterworfen war, während das Potential U_1 die Bedingungen erfüllt, denen die Function U' unterworfen war; auf der Fläche S ist $A - U_2 = U_1$; folglich kann man auf die Functionen $U = A - U_2$ und $U' = U_1$ den Satz des vorigen § anwenden. Bezeichnen $\overline{P_1}$ und $\overline{P_2}$ die Differentialparameter erster Ordnung der Functionen U_1 und U_2, so hat man $\overline{P} = -\overline{P_2}$ und $\overline{P'} = \overline{P_1}$, und die Formel (13) giebt:

$$h = -\frac{1}{4\pi}\left[P_1 \cos(P_1 n) + P_2 \cos(P_2 n)\right]. \tag{16}$$

Hierin sind $\overline{P_1}$ und $\overline{P_2}$ die Kräfte, mit denen die Massen m_1 und m_2 einen Punkt von der Einheit der auf der Fläche S befindlichen Masse anziehen oder abstossen. Bezeichnet man also mit $\overline{P}$ ihre Resultante, d. h. die Kraft, mit der die ganze Masse auf denselben Punkt wirkt, so hat man

$$P_1 \cos(P_1 n) + P_2 \cos(P_2 n) = P \cos(Pn);$$

da aber die Richtung von P normal zu der Niveaufläche S ist, so wird $\cos(Pn) = \pm 1$; also ist:

$$h = -\frac{1}{4\pi} P \cos(Pn) = \mp \frac{1}{4\pi} P. \tag{17}$$

Die ganze über die Fläche S vertheilte Masse ist durch das Integral

$$\int h dS = -\frac{1}{4\pi}\int P \cos(Pn) dS$$

ausgedrückt, welches nach dem Gauss'schen Satze übergeht in:

$$\int h dS = m_1;$$

d. h. *die Quantität der über die Fläche S vertheilten Masse ist gleich dem innerhalb S enthaltenen Theile der Masse m.*

Hieraus ergiebt sich daher der folgende bemerkenswerthe Satz von Green:

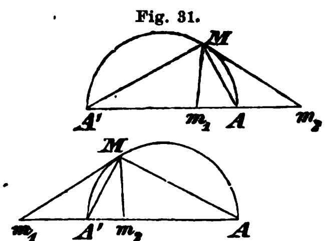
Wenn S eine geschlossene Niveaufläche ist, die der Wirkung einer gegebenen Masse m entspricht (wobei m aus positiven oder negativen Elementen bestehen kann), so kann man den innerhalb

S befindlichen Theil m_1 der gegebenen Masse auf der Fläche S derart vertheilen, dass die Dichtigkeit der Vertheilung $h = \mp \frac{1}{4\pi} P$ wird; *dabei bedeutet P die Grösse der Kraft, mit welcher die ganze Masse m einen Punkt von der Einheit der auf S befindlichen Masse anzieht. Diese über S vertheilte Masse wirkt auf einen Punkt, der ausserhalb des in S enthaltenen Raumes liegt, genau ebenso, wie die Masse m_1 im ursprünglichen Zustande wirken würde; ihre Wirkung auf einen inneren Punkt ist dagegen entgegengesetzt gleich der Wirkung der Masse m_2 des äusseren Theiles der gegebenen Masse m.*

In dem speciellen Falle, dass $m_2 = 0$ ist, d. h. dass die ganze gegebene Masse innerhalb S liegt, *kann die ganze Masse m über die Oberfläche S vertheilt werden, und zwar mit der Dichtigkeit $h = \mp \frac{1}{4\pi} P$; diese Oberflächenmasse wirkt dann auf einen äusseren Punkt so, wie sie im ursprünglichen Zustande wirken würde. Auf einen inneren Punkt aber übt sie keinerlei Wirkung aus, da für diesen Fall $U_2 = 0$ wird, also $A - U_2$ sich auf die constante Grösse A reducirt.*

Beispiele. 1) Es seien m_1 und m_2 (Fig. 31) zwei materielle Punkte von verschiedenartiger Masse; der erstere ziehe einen Punkt M an, der zweite stosse ihn ab. Bezeichnen r_1 und r_2 die Abstände m_1M und m_2M, so hat man den Ausdruck

Fig. 31.



$$U = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}$$

für das Potential der Wirkung der Masse $m = m_1 - m_2$ auf den Punkt M. Unter den Niveauflächen (U) verdient die Fläche (0) besondere Beachtung; es ist dies die Fläche

$$\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = 0. \qquad (a)$$

Man sieht leicht, dass sie eine Kugel ist. Die Gleichung (a) giebt nämlich die Proportion $m_1 : m_2 = r_1 : r_2$, aus welcher folgt, dass die Geraden MA und MA', die den Winkel m_1Mm_2 und sein Supplement halbiren, die Gerade m_1m_2 in zwei festen Punkten A und A' schneiden, die den Bedingungen

$$Am_1 : Am_2 = m_1 : m_2 \text{ und } A'm_1 : A'm_2 = m_1 : m_2$$

genügen. Da der Winkel AMA' ein rechter ist, so geht der in der Ebene AMA' gelegene Kreis, dessen Durchmesser die Entfernung AA' ist, durch den Punkt M. Durch Rotation dieses Kreises um AA' entsteht die Kugel, deren Gleichung (a) ist. Die Punkte A und A' sind die zugeordneten harmonischen Punkte zu m_1 und m_2. Ist die Masse $m_1 < m_2$, so liegt der Punkt m_1 innerhalb und m_2 ausserhalb der Kugel; man kann dann die Masse m_1 auf der Oberfläche der Kugel (a) so vertheilen, dass sie in diesem Zustande jeden ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt ebenso anzieht, wie der Punkt m_1. Dieselbe Masse zieht jeden innerhalb der Kugel gelegenen Punkt mit einer Kraft an, die derjenigen Kraft entgegengesetzt gleich ist, mit welcher dieser Punkt vom Punkte m_2 abgestossen wird. Die Dichtigkeit der Vertheilung der Masse m_1 auf der Kugel (a) ist $h = \frac{1}{4\pi} P$, wobei P die geometrische Summe der Componenten $\frac{m_1}{r_1^2}$ und $\frac{m_2}{r_2^2}$ ist, von denen die erstere die Richtung Mm_1 hat, während die zweite dem Mm_2 entgegengesetzt gerichtet ist. Man sieht nun leicht, dass $P = \frac{m_1}{r_1^2 r_2} c$ ist, wo c den Abstand $m_1 m_2$ bedeutet; dieser Ausdruck geht mit Hilfe der Gleichung (a) über in $P = \frac{m_1^2 c}{m_2 r_1^3}$; daher wird

$$h = \frac{m_1^2}{4\pi m_1} \cdot \frac{c}{r_1^3},$$

d. h. die Dichtigkeit der Vertheilung der Masse m_1 auf der Kugel (a) ist umgekehrt proportional dem Cubus des Radiusvectors r_1, der vom Punkte m_1 nach der Kugelfläche führt. Im Falle $m_2 < m_1$, liegt der Punkt m_2 innerhalb der Kugel (a); man kann dann die Masse m_2 über die Oberfläche dieser Kugel derart vertheilen, dass sie in diesem Zustande jeden ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt gerade so abstösst, wie der Punkt m_2. Dieselbe Masse stösst dann jeden innerhalb der Kugel gelegenen Punkt mit einer Kraft ab, die derjenigen Kraft entgegengesetzt gleich ist, mit welcher dieser Punkt

vom Punkte m_1 angezogen wird. Die Dichtigkeit der Vertheilung ist

$$h = -\frac{m_2^2}{4\pi m_1} \cdot \frac{c}{r_2^3};$$

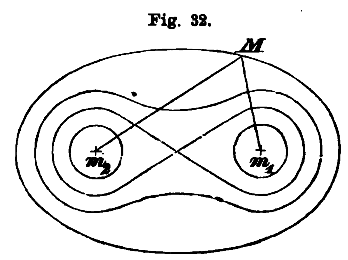
sie ist also negativ und dem Cubus des von m_2 nach der Kugeloberfläche führenden Radiusvectors umgekehrt proportional.

2) Gesetzt, der Punkt M werde von zwei materiellen Punkten m_1 und m_2 angezogen. Das Potential der Wirkung beider Massen auf den Punkt M ist:

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}.$$

Die Niveaufläche (U) ist eine geschlossene Rotationsfläche, deren Axe die Gerade $m_1 m_2$ und deren Meridian eine der in (Fig. 32) dargestellten Curven ist. Die ganze Masse $m = m_1 + m_2$ lässt sich auf der Fläche (U) derart vertheilen, dass sie in diesem Zustande jeden äusseren Punkt so anzieht, wie die Punkte m_1 und m_2 ursprünglich diesen Punkt anzogen. Die Dichtigkeit der Vertheilung ist $h = \frac{1}{4\pi} P$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass

Fig. 32.



$$P^2 = \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) U - \frac{m_1 m_2 c^2}{r_1^3 r_2^3}$$

ist, wenn c den Abstand $m_1 m_2$ bezeichnet.

3) Es sei m die Masse einer homogenen geraden Strecke AA' (Fig. 33) von der Länge $2c$ und der Dichtigkeit ϱ; diese Masse ziehe einen Punkt M an. Wählt man den Mittelpunkt O der Strecke als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen x-Axe die Richtung OA hat, und bezeichnet man die Coordinaten des Punktes M mit x und y, so ist das Potential der Anziehung des Punktes M durch die Masse m:

Fig. 33.

$$U = \varrho \int_{-c}^{+c} \frac{ds}{\sqrt{(c-x)^2 + y^2}} = \varrho \log\left(\frac{[(c-x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} + c - x}{[(c+x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} - c - x}\right)$$

oder

$$U = \varrho \log\left(\frac{AM + c - x}{A'M - c - x}\right).$$

Bezeichnet λ die grosse Halbaxe der Ellipse, deren Brennpunkte A und A' sind und die durch den Punkt M hindurchgeht, so hat man nach einer bekannten Eigenschaft der Radienvectoren der Ellipse:

$$AM = \lambda - \frac{cx}{\lambda},\ A'M = \lambda + \frac{cx}{\lambda};$$

folglich ist

$$\frac{AM + c - x}{A'M - c - x} = \frac{\lambda + c}{\lambda - c}$$

und

$$U = \varrho \log\left(\frac{\lambda + c}{\lambda - c}\right).$$

Man sieht hieraus, dass die Niveaufläche (U) diejenige ist, für welche die Grösse λ constant ist, d. h. sie ist ein Ellipsoid, das man durch Rotation der Ellipse, deren Brennpunkte A und A' und deren eine Halbaxe λ ist, um die Gerade AA' entsteht. Man kann somit die Anziehung, welche die Masse m der Strecke AA' auf einen beliebigen ausserhalb dieses Ellipsoids gelegenen Punkt ausübt, durch die Anziehung ersetzen, welche dieselbe Masse, wenn sie über die Oberfläche des Ellipsoids mit der Dichtigkeit $h = \frac{1}{4\pi} P$ vertheilt ist, ausübt. Diese Dichtigkeit kann man folgendermassen bestimmen. Bezeichnet h_1 den Differentialparameter erster Ordnung der Function λ, so ist:

$$P = -\frac{dU}{d\lambda} h_1 = \frac{2\varrho c h_1}{\lambda^2 - c^2}.$$

Nach § 55 der Kinematik ist aber $h_1 = \cos\alpha$, wo α die Hälfte des Winkels AMA' bedeutet; bezeichnet man nun mit δ das vom Centrum O auf die Tangente der Ellipse λ im Punkte M gefällte Perpendikel, so ist $\cos\alpha = \frac{\delta}{\lambda}$; folglich wird:

$$P = \frac{2\varrho c\delta}{\lambda(\lambda^2 - c^2)} = \frac{m\delta}{\lambda(\lambda^2 - c^2)};$$

daher ist die Dichtigkeit der Vertheilung der Masse m auf dem Ellipsoide (λ):

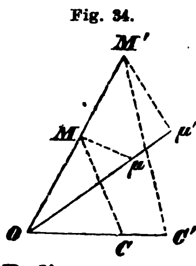
$$h = \frac{m\delta}{4\pi\lambda(\lambda^2 - c^2)}.$$

Der in diesem § behandelte Satz rührt von Green*) her. Er wurde später auf anderem Wege von Gauss**) und von Chasles***) gefunden. Die angeführten Beispiele sind dem Werke von W. Thomson und P. G. Tait „Treatise on Natural Philosophy" entnommen. Liouville hat gezeigt, dass die auf einer sie vollständig umschliessenden Niveaufläche (S) vertheilte Masse m und die Masse m im ursprünglichen Zustande einen gemeinsamen Trägheitsmittelpunkt haben; W. Thomson fand, dass diese beiden Massen gemeinschaftliche Hauptträgheitsaxen haben.†)

53. *Methode der elektrischen Bilder von W. Thomson.*

Die in den §§ 59, 60, 61 der Kinematik (S. 131 u. ff.) vorgetragene Methode der Umwandlung eines geometrischen Gebildes in ein anderes vermittelst reciproker Radienvectoren giebt, wie W. Thomson gezeigt hat, ein Mittel an die Hand, um aus dem gegebenen Potential der Wirkung einer gegebenen Masse auf einen Punkt das Potential der Wirkung einer anderen Masse auf einen anderen Punkt zu bestimmen.

Fig. 34.



Es sei O (Fig. 34) ein fester Pol, μ, μ' zwei mit ihm auf derselben Geraden gelegene Punkte, die so angenommen sind, dass die Radienvectoren $O\mu = r$ und $O\mu' = r'$ der Bedingung

$$rr' = c^2$$

*) „An Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism", Nottingham 1828.

**) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, Leipzig 1840.

***) Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris 1839, 1er sémestre. Addition à la Connaissance des Temps pour 1845.

†) „Sur une propriété de la couche électrique à la surface d'un corps conducteur". „Note on the preceding article". Cambridge and Dublin Math. Journ., ed. by W. Thomson. V. I. 1846.

genügen, wo c eine Constante ist. Auf Grund dieser Bedingung kann man zu einem gegebenen Punkte μ den Punkt μ' bestimmen und jedes geometrische Gebilde, welches durch ein Punktsystem (μ) dargestellt ist, in ein Gebilde des Punktsystems (μ') transformiren. In § 60 der Kinematik ist gezeigt worden, dass die Oberflächen und Volumina zweier solcher Gebilde in entsprechend ähnliche Differentialelemente zerlegt werden können und dass, wenn die entsprechenden Elemente der Linien, Flächen und Volumina mit ds und ds', dS und dS', dV und dV' bezeichnet werden, man hat:

$$ds:ds' = r:r',\ dS:dS' = r^2:r'^2,\ dV:dV' = r^3:r'^3; \quad (a)$$

hierin bedeuten r und r' die reciproken Radienvectoren, die vom Pole O nach den den entsprechenden Elementen angehörigen Punkten μ und μ' führen. Gesetzt, die entsprechenden Gebilde enthalten die Massen m und m', die so vertheilt seien, dass die in entsprechenden Elementen der Gebilde gelegenen Massenelemente dm und dm' der Bedingung

$$dm : dm' = r^{\frac{1}{2}} : r'^{\frac{1}{2}} \quad (b)$$

genügen. Die materiellen Punkte dm und dm' (die man als der statischen Elektricität angehörig betrachten kann) nennt W. Thomson, wenn sie der Bedingung (b) genügen, *elektrische Bilder*, indem er sagt, es sei einer das elektrische Bild des anderen. Bezeichnen ϱ und ϱ' die Dichtigkeiten der Massen dm und dm', so erhält man das Verhältniss dieser Dichtigkeiten, indem man die Gleichung (b) durch eine der Gleichungen (a) dividirt, und zwar ergiebt sich:

$$\varrho : \varrho' = r^{-\frac{1}{2}} : r'^{-\frac{1}{2}} = c : r = r' : c \text{ für lineare Gebilde,}$$

$$\varrho : \varrho' = r^{-\frac{3}{2}} : r'^{-\frac{3}{2}} = c^3 : r^3 = r'^3 : c^3 \text{ für Flächengebilde,}$$

$$\varrho : \varrho' = r^{-\frac{5}{2}} : r'^{-\frac{5}{2}} = c^5 : r^5 = r'^5 : c^5 \text{ für räumliche Gebilde.}$$

Man sieht hieraus, dass, wenn die Masse m constante Dichtigkeit hat, die Dichtigkeit der Masse m' variabel ist; sie ist nämlich einer Potenz des Abstandes r' des entsprechenden Elementes vom Pole O umgekehrt proportional. Gesetzt, die in μ und μ' enthaltenen Massen dm und dm' ziehen zwei entsprechende Punkte M und M' an. Da nun

$$O\mu \cdot O\mu' = OM \cdot OM' = c^2$$

ist, so verhält sich

$$O\mu : OM' = OM : O\mu';$$

daher sind die Dreiecke $O\mu M$ und $OM'\mu'$ ähnlich, woraus folgt:

$$\mu M : \mu' M' = OM : O\mu' = OM : r'.$$

Aus diesen Proportionen in Verbindung mit (b) folgt aber:

$$\frac{dm}{\mu M} : \frac{dm'}{\mu' M'} = c : OM.$$

Dieses nur von der Lage des Punktes M abhängige Verhältniss hat für alle Elemente dm und dm' denselben Werth, so dass man hat:

$$\int \frac{dm}{\mu M} : \int \frac{dm'}{\mu' M'} = c : OM.$$

Nun ist aber $\int \frac{dm}{\mu M}$ das Potential der Wirkung der Masse m auf den Punkt M und $\int \frac{dm'}{\mu' M'}$ das Potential der Wirkung von m' auf M'. Bezeichnet man diese Potentiale mit U und U', so hat man:

$$U : U' = c : OM = OM' : c. \qquad (c)$$

Dies ist die von W. Thomson gefundene interessante Beziehung zwischen den Potentialen der Kräfte, mit welchen zwei entsprechende Punkte durch Massen, deren Elemente die elektrischen Bilder von einander sind, angezogen werden.

Nehmen wir z. B. an, es sei m eine homogene Masse, die über eine Kugeloberfläche S vertheilt ist. Wie in § 61 der Kinematik bewiesen wurde, geht diese Kugel bei der Transformation in eine andere Kugel S' über; folglich ist die Masse m auf dieser zweiten Kugel so vertheilt, dass ihre Dichtigkeit durch die Function $\varrho' = \frac{c^3 \varrho}{r'^3}$ dargestellt wird, d. h. sie ist dem Cubus des Abstandes des entsprechenden Punktes vom Pole O umgekehrt proportional. Ist R der Radius der Kugel S und δ der Abstand ihres Centrums C vom Pole O, so ist der Abstand des Centrums D der Kugel S' vom Pole O gleich $\frac{c^2 \delta}{\delta^2 - R^2}$; der Radius R' der Kugel S' hat einen der Werthe

$\frac{c^2 R}{\delta^2 - R^2}$ oder $\frac{c^2 R}{R^2 - \delta^2}$, je nachdem $\delta > R$ oder $\delta < R$ (s. Kinem. S. 139). Das Potential U der Wirkung der Masse m auf einen innerhalb S befindlichen Punkt M hat einen constanten Werth für alle solche Punkte; daher ist $U' = \frac{Uc}{OM'}$ eine Grösse, die dem Abstand des angezogenen Punktes M' vom Pole O umgekehrt proportional ist, so dass U' das Potential der Wirkung des Punktes O allein ist, der die Masse Uc hat. Für U kann man das Potential der Wirkung der Masse der Kugel S auf ihren Mittelpunkt C wählen, d. h. die Grösse $4\pi\varrho R$, wodurch $Uc = 4\pi\varrho Rc$ wird.

Liegt dagegen der Punkt M ausserhalb der Kugel S, so ist $U = \frac{m}{CM}$, also $U' = \frac{cm}{OM' \cdot CM}$. Bezeichnet C'*) den dem Centrum C der Kugel S entsprechenden Punkt, so hat man

$$CM : C'M' = OC : OM';$$

hieraus folgt

$$CM \,.\, OM' = OC \,.\, C'M' = \delta \,.\, C'M';$$

also:

$$U' = \frac{cm}{\delta \cdot C'M'}.$$

Man sieht hieraus, dass die Kugel S' den Punkt M' so anzieht, wie eine in C' concentrirte Masse $\frac{cm}{\delta}$. Setzt man $\frac{cm}{\delta} = m_1$, so wird $m_1 : m = c : OC = OC'^{\frac{1}{2}} : OC^{\frac{1}{2}}$. Man kann daher nach der Bedingung (b) die in den entsprechenden Punkten C und C' concentrirten Massen m und m_1 als ihre gegenseitigen elektrischen Bilder betrachten.

Die Anwendung der Methode der elektrischen Bilder auf Probleme der Elektrostatik findet man in den folgenden Werken:

W. Thomson, On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium. Cambridge and Dublin math. Journ. T. III, IV, V.

R. Lipschitz, Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Vertheilung der Elektricität. Crelle's Journal, Bd. 61 (1863), S. 1.

*) Der Punkt C' fällt nicht mit dem Centrum D der Kugel S' zusammen.

A. T. Stolétoff, Ueber die allgemeine Aufgabe der Elektrostatik und ihre Reduction auf den einfachsten Fall. Mathematisches Journal, herausgegeben von der Moskauer Mathematischen Gesellschaft. Bd. IV, erstes Heft, 1869 (russ.).

Die Folgerungen aus dem Green'schen Satze und andere allgemeine auf die Potentiale elektrischer und magnetischer Massen bezügliche Sätze sind in den folgenden Werken behandelt:

G. Green: „An essay on the application of math. analysis to the theories of electricity and magnetism," Nottingham, 1828; auch in Crelle's Journ. Bd. 39 (1850) S. 73, Bd. 44 (1852) S. 356 u. Bd. 47 (1854) S. 161 u. 195.

Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Bezug auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte (1840).

A. Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik (1865).

Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln vergleiche man:

Poisson, Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. Mémoires de l'Institut de France, 1811. Mémoire sur la distribution de l'électricité dans une sphère creuse électrisée par influence. Bull. de la société philomathique, 1824.

G. Kirchhoff, Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln. Crelle's Journ., Bd. 59 (1861), S. 89.

W. Thomson, On the mutual Attraction or Repulsion between two electrified spherical conductors. Philos. Mag., Vol. V, 4. series (1853), p. 287.

C. Neumann, Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle 1862.

D. Bobyleff, Die elektrostatische Aufgabe über die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln, die unter dem Einflusse gegebener äusserer elektrischer Massen stehen. 1873 (russ.).

Capitel III.

Arbeit einer Kraft und eines Kräftesystems. — Vector und Drehungsmoment einer Kraft. — Hauptvector und Hauptmoment eines Kräftesystems. — Bedingungen, die zum Gleichgewicht aller auf ein beliebiges System materieller Punkte wirkenden Kräfte erforderlich sind. — Bedingungen, die für das Gleichgewicht aller auf ein unveränderliches Punktsystem wirkenden Kräfte genügend sind. — Kleinstes Hauptmoment und Centralaxe eines Kräftesystems.

54. Zur Bestimmung und Messung einer Kraft hat man in der Mechanik ausser den in Capitel I besprochenen Grössen noch eine weitere angenommen, die man die *Arbeit der Kraft* nennt; dieselbe dient zur Schätzung der Wirkung einer Kraft, welche Bewegung erzeugt.

Wenn eine constante Kraft $\overline{F}$ bewirkt, dass ein ursprünglich ruhender Punkt, ohne einen Widerstand zu finden, eine geradlinige Wegstrecke s durchläuft, so betrachtet man das Product $\overline{Fs}$ als ein Maass der Wirkung der Kraft während der Bewegung ihres Angriffspunktes und nennt dasselbe die Arbeit der Kraft F bezüglich des Weges s.

Wenn ein Körper vom Gewichte $\overline{F}$ von einer verticalen Höhe h heruntergefallen ist, so ist Fh die Arbeit dieses Gewichtes bezüglich der Höhe h. Als Einheit jeder Arbeit hat man die Arbeit der Gewichtseinheit, die einen Körper um die Höheneinheit fallen macht, gewählt. Ist das Kilogramm die Gewichtseinheit und das Meter die Einheit des Höhenmaasses, so ist die Arbeitseinheit das *Kilogrammmeter*.

Wenn der ursprünglich ruhende, gemeinschaftliche Angriffspunkt zweier constanten Kräfte $\overline{F}$ und $\overline{F'}$ infolge ihrer gleichzeitigen Wirkung einen geradlinigen Weg $\overline{s}$ durchläuft, so erzeugen diese Kräfte eine Arbeit Rs gleich der Arbeit ihrer Resultante $\overline{R} = \overline{F} + \overline{F'}$. Da

$$R = F\cos(F, s) + F'\cos(F', s)$$

ist, so hat man

$$Rs = F\cos(F, s)\cdot s + F'\cos(F', s)\cdot s, \tag{1}$$

d. h. die Arbeit zweier Kräfte $\overline{F}$ und $\overline{F'}$ ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten ihrer Projectionen $\pm F\cos(F, s)$ und $\pm F'\cos(F', s)$ auf die Richtung der Wegstrecke s. Jedes

Glied der Summe (1) betrachtet man als die Arbeit der entsprechenden Kraftcomponente, so dass man also das geometrische Product $F \cos(F, s) . s = \overline{Fs}$ als die Arbeit der Kraft F ansieht. Hieraus ergiebt sich als allgemeine Definition der Arbeit einer constanten Kraft bezüglich einer beliebigen geradlinigen Strecke, welche der Angriffspunkt der Kraft durchläuft, wenn die letztere zugleich mit anderen Kräften auf ihn wirkt:

Die Arbeit einer constanten Kraft bezüglich einer geradlinigen Wegstrecke ist das geometrische Product dieser beiden Grössen.

Die Arbeit ist gleich Null, wenn die Kraft senkrecht zu dem Wege gerichtet ist; sie wird negativ, wenn die Kraft mit dem Wege einen Winkel bildet, der grösser ist als 90°.

55. Diese Definition der Arbeit erstreckt sich auch auf variable Kräfte bezüglich unendlich kleiner Wegstrecken. Es sei $\overline{F}$ der Werth einer variablen Kraft zur Zeit t und $\overline{\varepsilon}$ der unendlich kleine Elementarweg, den der Angriffspunkt in dem nächstfolgenden unendlich kleinen Zeitelement τ durchläuft und der durch die Geschwindigkeit oder eine der Beschleunigungen bestimmt ist; dann nennt man das geometrische Product $\overline{F\varepsilon}$ die Elementararbeit der Kraft $\overline{F}$ bezüglich der Verschiebung $\overline{\varepsilon}$.

Ist $\overline{s}$ der geradlinige Weg, den der Angriffspunkt einer einzeln oder gleichzeitig mit anderen Kräften wirkenden Kraft $\overline{F}$ durchläuft, und sind $\overline{v}, \overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots$ die zur Zeit t erlangte Geschwindigkeit und die Beschleunigungen, so nimmt man für $\overline{\varepsilon}$ die Strecke $v\tau$ in der Richtung der Geschwindigkeit $\overline{v}$, wenn diese nicht gleich Null ist. Ist aber $v = 0$ und ist v_n die erste nicht verschwindende Beschleunigung, so hat man für $\overline{\varepsilon}$ die unendlich kleine Strecke $(n+1)^{\text{ster}}$ Ordnung $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1)} v_n \tau^{(n+1)}$ zu wählen, die auf der Richtung der Beschleunigung v_n der n^{ten} Ordnung aufzutragen ist.

Wenn v nicht gleich Null ist, so hat man $\varepsilon = v\tau = ds$, und die Elementararbeit ist durch das Product

$$\overline{Fds} = \overline{Fv} . dt$$

ausgedrückt, ist also eine gewisse Differentialfunction der Zeit.

Das von 0 bis t genommene Integral dieser Function

$$\int_0^t \overline{Fv} \cdot dt \tag{2}$$

heisst die Arbeit der Kraft F zur Zeit t oder die Arbeit der Kraft bezüglich der Wegstrecke $s = \int_0^t v dt$.

56. *Die Elementararbeit einer Kraft, die ein Potential hat, ist gleich dem Differentiale des Potentials nach der Verschiebung.*

Ist φ das Potential der Kraft $\overline{F}$, so ist $\frac{d\varphi}{ds} = F \cos(F, ds)$ die Derivirte des Potentials φ nach der Verschiebung ds; folglich ist

$$d\varphi = F \cos(F, ds) \cdot ds = \overline{Fds}$$

die Elementararbeit der Kraft $\overline{F}$ bezüglich der Verschiebung ds.

Bezeichnet φ_0 den Anfangswerth des Potentials, d. h. seinen Werth für $s = 0$, so hat man für die Arbeit der Kraft F bezüglich der Wegstrecke s den Ausdruck:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^s \overline{Fds},$$

d. h. die Arbeit einer Kraft, die ein Potential hat, ist gleich dem Incremente, welches das Potential der Kraft beim Uebergange von dem Anfangswerth zu demjenigen Werthe erhält, der dem Endpunkte des von dem Angriffspunkte der Kraft durchlaufenen Weges entspricht.

Durch den Anfangspunkt des Weges s geht eine Niveaufläche (φ_0) und durch den Endpunkt eine andere (φ) hindurch. Vertauscht man den Weg s mit einem anderen s', der gleichfalls auf der Fläche (φ_0) beginnt und auf (φ) endigt, aber auf irgend einer anderen Trajectorie des Angriffspunktes der Kraft liegt, so erhält man dieselbe Grösse

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^{s'} \overline{Fds}$$

für die Arbeit. *Die Arbeit einer Kraft, die ein Potential hat, hängt weder von der Art der Trajectorie des Angriffspunktes der Kraft ab, noch von dem Orte des Anfangs- und Endpunktes des durchlaufenen Weges auf den Niveauflächen, zwischen denen dieser Weg liegt.*

Ist die an einem Punkte M angreifende Kraft $\overline{F}$ die Anziehungskraft, welche eine homogene Kugel von der Masse m nach dem Newton'schen Gesetz ausübt, d. h. ist sie dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional, so ist $\varphi = \frac{m}{r}$, wenn r den Abstand des Punktes M vom Mittelpunkte der Kugel bedeutet. Folglich ist

$$\overline{F}\overline{ds} = d\left(\frac{m}{r}\right) = -\frac{m\,dr}{r^2}$$

der Ausdruck für die Elementararbeit, während

$$\int_0^s \overline{F}\overline{ds} = \frac{m}{r} - \frac{m}{r_0},$$

worin r_0 der Anfangswerth von r ist, die endliche Arbeit der Kraft $\overline{F}$ ist für eine beliebige Bewegung des Punktes M beim Uebergange von irgend einem Punkte der Oberfläche der mit m concentrischen Kugel vom Radius r_0 nach irgend einem Punkte der concentrischen Kugelfläche vom Radius r.

Die Wirkung jeder Kraft $\overline{F}$ kann man als eine Anziehung ihres Angriffspunktes M nach einem gewissen festen Punkte O hin ansehen, der auf der Richtungslinie der Kraft nach der Seite hin liegt, wohin dieselbe gerichtet ist. Bezeichnet man den Abstand OM mit r und betrachtet diese Grösse als variabel, $\overline{F}$ aber als constant, so kann man für einen Augenblick den Ausdruck $-\overline{F}r$ als das Potential der Kraft F ansehen; denn diese Kraft ist nach Grösse und Richtung gleich dem Differentialparameter jener Function im Punkte M.

Die Elementararbeit $\overline{F}\overline{ds}$ ist dann durch das Differential $-Fdr$ ausgedrückt. Dieses Differential, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, d. h. die Grösse Fdr, hat Lagrange das *Moment* der Kraft genannt.*) Hierbei ist $-dr$ die Projection der unendlich kleinen Verschiebung $\overline{\varepsilon}$ des Angriffspunktes der Kraft $\overline{F}$ auf ihre Richtung.

Sind die Geschwindigkeit $\overline{v}$ und die Beschleunigungen $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots \overline{v_{n-1}}$ gleich Null und nimmt man (wie schon oben

*) Mécanique analytique, 1ière partie, article 2. — Galilei nannte Moment einer Kraft das Product aus der Kraft in die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes nach der Richtung der Kraft.

erwähnt wurde) für $\bar{\varepsilon}$ den Elementarweg $\frac{1}{1.2\ldots(n+1)} v_n \tau^{n+1}$, wo τ unendlich klein ist, so ist die Elementararbeit eine unendlich kleine Grösse $(n+1)^{\text{ster}}$ Ordnung, nämlich:

$$\overline{F\varepsilon} = \frac{\tau^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \overline{Fv_n}.$$

Hat die Kraft $\bar{F}$ ein Potential, so ist

$$\overline{Fv_n} = \frac{d^{n+1}\varphi}{dt^{n+1}}$$

(s. Kinematik § 112) und folglich wird:

$$\overline{F\varepsilon} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)} d^{n+1}\varphi.$$

Bei den Problemen der Statik kann man sich auf die Untersuchung der Elementararbeiten beschränken, die wir weiterhin der Einfachheit halber kurz die Arbeiten der Kräfte nennen wollen.

57. Ist

$$\bar{F} = \bar{F_1} + \bar{F_2} + \cdots,$$

so hat man nach der Regel für die geometrische Multiplication

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{F_1\varepsilon} + \overline{F_2\varepsilon} + \cdots,$$

d. h. *die Arbeit der Resultante ist gleich der Summe der Arbeiten aller Componenten.*

Ist $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \cdots$, so wird

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{F\varepsilon_1} + \overline{F\varepsilon_2} + \cdots,$$

d. h. *die Arbeit einer Kraft bezüglich einer zusammengesetzten Verschiebung ist gleich der Summe ihrer Arbeiten bezüglich der Componenten der Verschiebung.*

Gesetzt z. B., es seien X, Y, Z die Componenten der Kraft $\bar{F}$ nach den Richtungen dreier Axen Ox, Oy, Oz; man hat dann nach dem ersten Satze:

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{X\varepsilon} + \overline{Y\varepsilon} + \overline{Z\varepsilon}.$$

Sind x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft $\bar{F}$ bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz und nimmt man für $\bar{\varepsilon}$ eine Verschiebung erster Ordnung, so ist

$$\bar{\varepsilon} = \overline{dx} + \overline{dy} + \overline{dz},$$

folglich

$$\overline{F\varepsilon} = Xdx + Ydy + Zdz$$
$$+ (Ydz + Zdy)\cos(yz) + (Zdx + Xdz)\cos(xz)$$
$$+ (Xdy + Ydx)\cos(xy).$$

Im Falle rechtwinkliger Coordinaten reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$\overline{F\varepsilon} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Nehmen wir ferner an, der Punkt M werde von einer Masse m derart angezogen, dass die Kraft der Anziehung durch ein Element dm gleich $f(r)dm = \frac{d \,.\, F(r)}{dr} dm$ ist, wo r den Abstand dieses Elements vom Punkte M bezeichnet. Ist dann $\overline{\varepsilon}$ von der ersten Ordnung und ist δr die Projection von $\overline{\varepsilon}$ auf $\overline{r}$, so ergiebt sich für die Arbeit der Anziehung durch ein Massenelement der Ausdruck:

$$- f(r) dm \delta r = \delta F(r) \,.\, dm.$$

Das über die ganze Masse m ausgedehnte Integral dieses Ausdrucks

$$\int \delta F(r) \,.\, dm$$

repräsentirt dann die Arbeit der Resultante aller Elementarattractionen. Das Differentialzeichen δ kann man vor das Integralzeichen setzen, so dass man erhält:

$$\delta \int F(r) dm.$$

Hierin ist $\int F(r)dm$ das Potential der Resultante.

58. Es sei $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ ein System von Kräften, die an den Punkten $m, m', m'', \ldots$ angreifen, und $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$ die unendlich kleinen, gleichzeitigen Verschiebungen dieser Punkte. Die Summe der Arbeiten aller Kräfte bezüglich der Verschiebungen ihrer Angriffspunkte, d. h. die Grösse

$$\overline{F\varepsilon} + \overline{F'\varepsilon'} + \overline{F''\varepsilon''} + \cdots, \tag{3}$$

heisst die *totale Arbeit* des Kräftesystems.

Sind die Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ die Differentialparameter erster Ordnung einer Function φ in den Punkten $m, m', m'', \ldots$ (s. Kinematik § 115) und $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$ die Verschiebungen

mit den Geschwindigkeiteu $\overline{v}, \overline{v'}, \overline{v''}, \ldots$ in der unendlich kleinen Zeit dt, so ist:

$$d\varphi = \Sigma \overline{F v} \, . \, dt = \Sigma \overline{F \varepsilon}.$$

Die Function φ heisst das Potential des Kräftesystems $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ Die Formel zeigt, dass, *wenn ein Kräftesystem ein Potential hat, die totale Arbeit der Kräfte bezüglich der unendlich kleinen Differentialverschiebungen erster Ordnung gleich dem Differentiale des Potentials ist.*

Für unendlich kleine Elementarverschiebungen $(n+1)^{\text{ster}}$ Ordnung, die nur von den Beschleunigungen n^{ter} Ordnung abhängen, ergiebt sich, ebenso wie im Falle eines einzelnen Punktes:

$$\Sigma \overline{F \varepsilon} = \frac{1}{1 \, . \, 2 \ldots (n+1)} \, d^{n+1} \varphi.$$

Es seien zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\overline{F}$ und $\overline{F'}$, die an zwei Punkten m und m' angreifen, längs deren Verbindungslinie gerichtet. Man hat dann:

$$\overline{F \varepsilon} + \overline{F' \varepsilon'} = \overline{F (\overline{\varepsilon} - \overline{\varepsilon'})}.$$

Bezeichnet $\overline{r}$ den Abstand der Punkte m und m' von einander, wobei m' der Anfangspunkt sei, so ergiebt sich für den Fall unendlich kleiner Verschiebungen erster Ordnung

$$\overline{\varepsilon_1} - \overline{\varepsilon'} = \overline{dr},$$

also

$$\varepsilon \cos (\varepsilon r) - \varepsilon' \cos (\varepsilon' r) = dr$$

und

$$\overline{F \varepsilon} + \overline{F' \varepsilon'} = \pm F dr, \tag{4}$$

wo das Zeichen $+$ zu wählen ist, wenn die Kräfte $\overline{F}$ und $\overline{F'}$ den Abstand r zu vergrössern, und das Zeichen $-$, wenn sie ihn zu verkleinern streben.

Für den Fall unendlich kleiner Verschiebungen $(n+1)^{\text{ster}}$ Ordnung erhält man:

$$\overline{F \varepsilon} + \overline{F' \varepsilon'} = \pm \frac{F}{1 \, . \, 2 \ldots (n+1)} \, d^{n+1} r. \tag{5}$$

Es sei ein System von materiellen Punkten $m, m', m'', \ldots$ gegeben, die sich nach dem Gesetze der Gleichheit von Action

und Reaction anziehen und abstossen. Bezeichnet man mit (mm') die Grösse der Kraft, mit welcher zwei Punkte m und m' auf einander einwirken, und mit r den Abstand dieser Punkte von einander, so kann man nach Formel (5) die totale Arbeit aller Kräfte der gegenseitigen Einwirkung der Punkte auf einander durch die folgende Summe darstellen

$$\Sigma \pm \frac{(mm')\, d^{n+1} r}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}, \tag{6}$$

die über alle, paarweis zu combinirende Punkte auszudehnen ist.

Sind alle Kräfte (mm') nur Functionen der Abstände und sind sie den Massen proportional, d. h. haben sie die Form $mm' f(r)$, so lässt sich, wenn man $f(r) = \frac{d \cdot F(r)}{dr}$ setzt, die totale Arbeit (6) in folgender Form darstellen:

$$\Sigma \pm mm' \frac{d \cdot F(r)}{dr} \cdot \frac{d^{n+1} r}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}.$$

Da die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen bis zur $(n-1)^{\text{sten}}$ Ordnung bei den Verschiebungen $\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\varepsilon}'', \ldots$ gleich Null sind, so ist

$$dr = 0,\ d^2 r = 0, \ldots\ d^n r = 0,$$

also

$$\frac{d \cdot F(r)}{dr} d^{n+1} r = d^{n+1} \cdot F(r);$$

dadurch nimmt die Formel (6) die folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} d^{n+1} \Sigma \pm mm' F(r). \tag{7}$$

Hierin stellt die Summe $\Sigma \pm mm' F(r)$ das Potential für alle Kräfte der gegenseitigen Einwirkung der Punkte m, m', m'', ... dar.

Sind die Verschiebungen $\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\varepsilon}'', \ldots$ erster Ordnung, so ist die totale Arbeit aller dieser Kräfte durch das totale Differential erster Ordnung

$$d \cdot \Sigma \pm mm' F(r)$$

ausgedrückt.

59. Wenn die Punkte m, m', m'', ... solche Verschiebungen erleiden, dass ihre gegenseitigen Abstände sich nicht ändern, so ist für alle Punktpaare $d^{n+1} r = 0$; daher ist auch

der Ausdruck (6) gleich Null. Mithin *ist die totale Arbeit der Kräfte der gegenseitigen Einwirkung der Punkte eines materiellen Punktsystems auf einander nach dem Gesetze der Gleichheit von Action und Reaction gleich Null, wenn die Verschiebungen keine Aenderung der Abstände der Punkte von einander zur Folge haben.*

In § 155 der Kinematik haben wir gesehen, dass jede Bewegung eines Punktsystems, bei der sich die Abstände zwischen irgend zwei Punkten nicht ändern, sich zerlegen lässt in eine Translation, für welche die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gleich denen eines beliebigen Punktes O sind, und in eine Rotation um diesen Punkt. Wenn also die Verschiebungen $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$, $\overline{\varepsilon''}$, ... die Abstände der Punkte m, m', m'', ... von einander nicht ändern, so lassen sie sich zerlegen in Translationsverschiebungen, die der Verschiebung eines Punktes O geometrisch gleich sind, und in Rotationsverschiebungen um diesen Punkt O; d. h. man kann setzen

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}, \quad \overline{\varepsilon'} = \overline{\alpha} + \overline{\beta'}, \quad \overline{\varepsilon''} = \overline{\alpha} + \overline{\beta''}, \ldots,$$

wo $\overline{\alpha}$ die Verschiebung des Punktes O und $\overline{\beta}$, $\overline{\beta'}$, $\overline{\beta''}$, ... die Rotationsverschiebungen der Punkte m, m', m'', ... um den Punkt O sind.

Sind alle diese Verschiebungen von der ersten Ordnung, so kann man setzen:

$$\overline{\alpha} = \overline{u\tau}, \quad \overline{\beta} = \overline{w\tau}, \quad \overline{\beta'} = \overline{w'\tau}, \ldots,$$

wo $\overline{u}$ die Geschwindigkeit des Punktes O und w, w', ... die Rotationsgeschwindigkeiten der Punkte m, m', m'', ... um O sind. Für diese Geschwindigkeiten giebt es eine Momentanaxe und eine Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$, die in bekannter Weise auf dieser Axe aufgetragen wird. Das Product $\sigma = \omega\tau$ ist dann die unendlich kleine Winkelverschiebung, vermittelst deren die Verschiebungen $\overline{\beta}$, $\overline{\beta'}$, $\overline{\beta''}$, ... erzeugt werden können.

Im Allgemeinen hat man, wenn die Verschiebungen unendlich klein von der $(n+1)^{\text{sten}}$ Ordnung sind,

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)} \overline{u_n \tau^{n+1}}, \quad \overline{\beta} = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)} \overline{w_n \tau^{n+1}},$$

$$\overline{\beta'} = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)} \overline{w'_n \tau^{n+1}}, \ldots,$$

wo $\overline{u_n}$ die Beschleunigung n^{ter} Ordnung bei der Bewegung des Punktes O ist, während w_n, w'_n, ... die Rotationsbeschleunigungen derselben Ordnung um O sind. Da die Geschwindigkeit und alle Beschleunigungen niederer Ordnung gleich Null sind für $\tau = 0$, so müssen die Beschleunigungen w_n, w'_n, ... eine Momentanaxe mit einer gewissen Winkelbeschleunigung $\overline{\omega_n}$ haben, welche diejenige Winkelverschiebung

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\overline{\omega_n}\tau^{n+1}$$

bestimmt, die im Stande ist, alle Verschiebungen $\overline{\beta}$, $\overline{\beta'}$, ... hervorzubringen.

Da $\overline{F\varepsilon} = \overline{F\alpha} + \overline{F\beta}$ ist, so zerlegt sich die Arbeit jeder Kraft in die Arbeit bezüglich der Translationsverschiebung $\overline{\alpha}$ und in die Arbeit bezüglich der Rotationsverschiebung $\overline{\beta}$. Das erste Glied ist gleich der Arbeit einer der Kraft $\overline{F}$ geometrisch gleichen, am Punkt O angreifenden Kraft $\overline{OM}$. In dem zweiten Gliede $\overline{F\beta} = \beta \,.\, F\cos(F, \beta)$ drückt der Factor β die Fläche eines Parallelogramms aus, dessen eine Seite die auf der Momentanaxe aufgetragene Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$, dessen andere Seite der nach dem Angriffspunkte der Kraft $\overline{F}$ gezogene Radiusvector Om ist; der zweite Factor $F\cos(F, \beta)$ ist das vom Endpunkte der Kraft $\overline{F}$ auf die Ebene jenes Parallelogramms gefällte Perpendikel, das mit $+$ zu nehmen ist, wenn der Winkel (F, β) spitz, und mit $-$, wenn er stumpf ist. Daher repräsentirt die Arbeit $\overline{F\beta}$ das mit entsprechendem Vorzeichen versehene Volumen des Parallelepipedons, welches $\overline{\sigma}$, $\overline{Om}$ und $\overline{OM}$ zu an einander stossenden Kanten hat. Das Vorzeichen bestimmt sich nach folgender Regel: wenn ein nach dem Punkte m hinschauender Beobachter σ*) die Kraft $\overline{F}$ nach rechts gerichtet sieht, so hat man $+$, wenn er sie nach links gerichtet sieht, $-$ zu nehmen.

Dieses Volumen kann man auch anders darstellen, indem

*) Wenn wir die Strecke durch einen Beobachter ersetzt denken, so setzen wir immer voraus, dass derselbe sich an diese Strecke anlehnt und seine Füsse im Anfangspunkte, sein Kopf im Endpunkte der Strecke sich befinden.

man als Basis das über Om und OM als Seiten construirte Parallelogramm wählt und als Höhe das Perpendikel vom Endpunkte der Kante σ auf die Ebene jenes Parallelogramms. Denken wir uns eine Rotation, bei der die Winkelgeschwindigkeit durch die Kraft $\overline{F}$ dargestellt ist, während die Geschwindigkeit k des Punktes O gleich dem Flächeninhalte des erwähnten Parallelogramms ist. Dann ist das vom Endpunkte von $\overline{\sigma}$ auf die Ebene des Parallelogramms gefällte Perpendikel die Projection von $\overline{\sigma}$ auf die Geschwindigkeit $\overline{k}$, d. h. gleich $\sigma \cos(\sigma, k)$, mit $+$ oder $-$ zu nehmen, je nachdem $\overline{\sigma}$ für einen nach dem Punkte O hinschauenden Beobachter $\overline{F}$ nach rechts oder nach links hin gerichtet ist.

Nach derselben Seite, nach welcher die Kraft $\overline{F}$ für einen auf m hinschauenden Beobachter $\overline{\sigma}$ gerichtet ist, ist auch $\overline{\sigma}$ für einen auf O blickenden Beobachter $\overline{F}$ gerichtet; daher sind die Winkel (σ, k) und (F, β) gleichzeitig spitz oder stumpf. Man hat folglich:

$$\overline{F\beta} = k\sigma \cos(\sigma, k). \tag{8}$$

In diesem Ausdrucke für die Arbeit einer Kraft bezüglich der Rotationsverschiebung ist der eine Factor die Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$ und folglich unabhängig von der Kraft. Der andere Factor $\overline{k}$ ist abhängig von der Grösse der Kraft $\overline{F}$, von ihrer Richtung und von der Lage ihrer Richtungslinie im Raume; von der Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$ dagegen ist er nicht abhängig; auch ist er von dem Orte des Angriffspunktes der Kraft $\overline{F}$ auf ihrer Richtungslinie unabhängig, da sich ja die Rotationsgeschwindigkeit $\overline{k}$ nicht ändert, wenn man statt der Winkelgeschwindigkeit $\overline{F}$ eine andere, ihr geometrisch gleiche und längs derselben Geraden gerichtete wählt. Die Strecke $\overline{k}$, welche die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes O bei einer Winkelgeschwindigkeit, die durch die Kraft $\overline{F}$ dargestellt ist, repräsentirt, nennt man das *Rotationsmoment der Kraft $\overline{F}$ für O als Ursprung.**)

---

*) Man nennt sie auch das *statische* und das *lineare Moment* (vergl. Kinematik, S. 301).

Das Rotationsmoment lässt sich folgendermassen rein geometrisch definiren: *Das Rotationsmoment einer Kraft $\overline{F}$ in Bezug auf einen Punkt O als Ursprung ist eine Strecke, deren Länge gleich der Flächenzahl desjenigen Parallelogramms ist, welches zur Basis die Kraft $\overline{F}$ und zur Höhe das vom Ursprung O auf die Kraft gefällte Perpendikel hat; man denkt sich jene Strecke im Punkte O senkrecht zur Ebene des Parallelogramms nach rechts für einen nach O hinschauenden Beobachter $\overline{F}$ aufgetragen.*

Die der Kraft $\overline{F}$ geometrisch gleiche Strecke $\overline{OM}$ und das Rotationsmoment der Kraft für O als Ursprung kann man vom rein geometrischen Gesichtspunkte aus als zwei Argumente betrachten, die zur Kenntniss der drei Bestimmungsstücke der Strecke $\overline{F}$ genügen, nämlich 1) der Lage der Richtungslinie dieser Strecke, 2) ihrer Grösse und 3) ihres Sinnes (vergl. Kinematik § 180, S. 380).

Das Argument $\overline{OM}$ werden wir den *Vector der Kraft $\overline{F}$ für O als Ursprung* nennen. Zur kürzeren Bezeichnung der beiden Argumente wollen wir schreiben:

$$\overline{OM} = VF, \ \overline{k} = MF.$$

Zwischen beiden Argumenten besteht die Gleichung

$$\overline{MF.VF} = 0,$$

die ausdrückt, dass dieselben auf einander senkrecht stehen.

Nach Formel (8) hat man:

$$\overline{F\beta} = \overline{MF.\sigma}. \tag{9}$$

In dem speciellen Falle, wenn die Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$ und das Moment MF längs derselben Geraden und im selben Sinne gerichtet sind, reducirt sich dieser Ausdruck auf das algebraische Product $MF.\sigma$; dann ist die Rotationsarbeit dem Rotationsmomente proportional, und man kann das Moment der Kraft als Maass ihrer Rotationsarbeit ansehen.

Fällt man vom Punkte O auf die Richtungslinie der Kraft $\overline{F}$ eine Senkrechte OD und ersetzt $\overline{F}$ durch eine ihr geometrisch gleiche, im Punkte D angreifende Kraft, so kann

man OD als Arm eines Hebels betrachten, an dessen Ende eine zu ihm senkrechte Kraft wirkt; daher nennt man OD den *Arm der Kraft* $\overline{F}$.

Die Grösse der Rotationsarbeit (9) ist, wie wir oben gesehen haben, dem Zahlenwerthe nach gleich dem Volumen eines Parallelepipedons, dessen drei zusammenstossende Kanten der Vector $\overline{VF}$, der Abstand Om des Punktes O von dem Angriffspunkte der Kraft und die Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$ sind. Dieses Volumen ist das sechsfache des Volumens eines Tetraeders, welches die Kraft $\overline{F}$ und die Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$ zu gegenüberliegenden Kanten hat. Bezeichnet man (wie in § 148, S. 318 der Kinematik) dieses Tetraedervolumen durch (F, σ), so wird

$$\overline{\sigma \,.\, MF} = 6(F, \sigma). \tag{10}$$

In dem erwähnten Parallelepipedon kann man das über $\overline{\sigma}$ und $\overline{VF}$ construirte Parallelogramm als Basis und den kürzesten Abstand zwischen der Kraft $\overline{F}$ und der Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$ als Höhe wählen. Bezeichnet man diesen kürzesten Abstand mit δ, so ist

$$\overline{\sigma \,.\, MF} = F\sigma \sin (F, \sigma) \,.\, \delta, \tag{11}$$

wobei man für (F, σ) den Winkel, welcher kleiner als 180^0 ist, zu wählen hat, wenn die Kraft F für den Beobachter σ nach rechts, den grösseren Winkel aber, wenn sie nach links gerichtet erscheint.

Der Factor $\sin (F, \sigma) \,.\, \delta$ in dem Ausdrucke (11) hängt nur von der relativen Lage der Richtungslinien von $\overline{F}$ und $\overline{\sigma}$ ab und ist gleich dem Zahlenwerthe des sechsfachen Volumens eines Tetraeders, das zu gegenüberliegenden Kanten zwei der Einheit gleiche und auf den Richtungslinien von $\overline{F}$ und $\overline{\sigma}$ aufgetragene Strecken hat.

Eine solche Grösse nennt man das *relative Moment der Richtungslinien der Strecken* $\overline{F}$ *und* $\overline{\sigma}$. Wir werden dasselbe mit $\binom{F}{\sigma}$ oder $\binom{\sigma}{F}$ bezeichnen. Hiermit nimmt die Formel (11) die folgende Gestalt an:

$$\overline{MF\,.\,\sigma} = F\sigma\binom{F}{\sigma}. \tag{12}$$

Es sei noch bemerkt, dass $F\sin(F,\sigma)$ die Projection der Kraft $\overline{F}$ auf eine zu $\overline{\sigma}$ senkrechte Ebene ist und dass die Grösse

$$MF\cos(MF,\sigma) = F\sin(F,\sigma)\delta = F\binom{F}{\sigma}$$

das Moment der durch diese Projection dargestellten Kraft ist bezüglich des Schnittpunktes der Projectionsebene mit der Richtungslinie von $\overline{\sigma}$; zugleich drückt dieselbe die Projection des Rotationsmoments $\overline{MF}$ auf diese Gerade aus. Die Projection des Rotationsmoments einer Kraft auf eine beliebige Axe nennt man das *Moment der Kraft bezüglich dieser Axe.*

Auf Grund der Formel (9) für die Arbeit einer Kraft bezüglich einer Rotationverschiebung lässt sich die Arbeit der Kraft bezüglich einer Verschiebung $\overline{\varepsilon}$ ausdrücken, die aus einer Translationsverschiebung $\overline{\alpha}$ und einer Rotationsverschiebung $\overline{\beta}$ zusammengesetzt ist, und zwar durch die Formel:

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{\alpha VF} + \overline{\sigma MF}. \tag{13}$$

Ist das System der totalen Verschiebungen $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$ ein rotatorisches um eine nicht durch den Ursprung O der Argumente VF und MF gehende Axe mit einer Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$, deren Ursprung in O' liegt, so lässt sich dieses System zerlegen in ein translatorisches, dessen gemeinsame Verschiebung $\overline{\alpha}$ geometrisch gleich der Rotationsverschiebung des Punktes O um den Punkt O' mit der Winkelgeschwindigkeit σ ist, und in ein rotatorisches um O mit einer Winkelverschiebung, die geometrisch gleich $\overline{\sigma}$ ist.

Diese letztere Winkelverschiebung kann man mit $V\sigma$ bezeichnen, die Translationsverschiebung aber mit $M\sigma$, so dass die Formel (13) übergeht in:

$$\overline{F\varepsilon} = \overline{M\sigma\,.\,VF} + \overline{V\sigma\,.\,MF}.$$

Bezeichnet man andererseits das Moment der Kraft $\overline{F}$ bezüglich des Ursprungs O' mit $M'F$, so ist $\overline{F\varepsilon} = \overline{\sigma \cdot M'F}$; folglich wird:

$$\overline{\sigma\,.\,M'F} = \overline{M\sigma\,.\,VF} + \overline{V\sigma\,.\,MF}. \tag{14}$$

Dividirt man dies durch $F\sigma$, so ergiebt sich die folgende bemerkenswerthe Wechselbeziehung zwischen den Momenten zweier Strecken $\overline{F}$ und $\overline{\sigma}$ bezüglich der beiden durch den Ursprung O zu ihren Richtungslinien gezogenen Parallelen:

$$\left(\frac{F}{\sigma}\right) = \left(\frac{\sigma}{VF}\right) + \left(\frac{F}{V\sigma}\right). \tag{15}$$

Liegen $\overline{F}$ und $\overline{\sigma}$ in einer Ebene, so wird

$$\overline{\sigma\,.\,M'F} = 0, \quad \left(\frac{F}{\sigma}\right) = 0,$$

und umgekehrt, wenn diese beiden Gleichungen bestehen, so liegen $\overline{F}$ und $\overline{\sigma}$ in einer Ebene. Diese Bedingung dafür, dass zwei Gerade in einer Ebene liegen, lässt sich auch durch jede der beiden folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$\overline{M\sigma\,.\,VF} + \overline{V\sigma\,.\,MF} = 0, \tag{16}$$

$$\left(\frac{\sigma}{VF}\right) + \left(\frac{F}{V\sigma}\right) = 0. \tag{17}$$

Es sei noch bemerkt, dass das Moment MF, als Rotations-Geschwindigkeit des Punktes O bei der Winkelgeschwindigkeit $\overline{F}$, sich zusammensetzt aus dem Momente $M'F$, der Rotationsgeschwindigkeit des Punktes O' bei derselben Winkelgeschwindigkeit $\overline{F}$ und aus $M(V'F)$, welches die Geschwindigkeit des Punktes O bei der Winkelgeschwindigkeit $V'F$ ist. Daher hat man:

$$\overline{MF} = \overline{M'F} + \overline{M(V'F)},$$

oder

$$\overline{M'F} = \overline{MF} - \overline{M(V'F)}. \tag{18}$$

Diese Formel kann zur Verlegung des Ursprunges der Vectoren und Momente einer Kraft dienen.

Man erhält die totale Arbeit eines gegebenen Systems von Kräften $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ die an den Punkten $m, m', m'', \ldots$ angreifen, in Bezug auf die Verschiebungen $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$, die die Abstände der Punkte von einander nicht ändern, wenn man die Formel (13) auf jede einzelne Kraft anwendet und die Resultate summirt. Es ergiebt sich so

$$\Sigma \overline{F\varepsilon} = \overline{\alpha \Sigma VF} + \overline{\sigma \Sigma MF}, \tag{19}$$

wo $\Sigma\overline{VF}$ die geometrische Summe der Vectoren aller Kräfte im Ursprung O und $\Sigma\overline{MF}$ die der Momente aller Kräfte für denselben Ursprung ist. Die erste Summe ist die Resultante der gegebenen, geometrisch nach dem Punkte O verlegten Kräfte; wir nennen sie den *Hauptvector.* Die zweite Summe heisse das *Hauptrotationsmoment* oder kurz das *Hauptmoment.* Bezeichnet man die erstere Grösse mit $\overline{R}$, die andere mit $\overline{K}$, so lässt sich die Formel (19) folgendermassen schreiben:

$$\Sigma \overline{F\varepsilon} = \overline{\alpha R} + \overline{\sigma K}. \tag{20}$$

Somit lässt sich die totale Arbeit eines Kräftesystems in Bezug auf Verschiebungen, die die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von einander nicht ändern, durch die vier Grössen $\overline{R}$, $\overline{K}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\sigma}$ ausdrücken. Die beiden ersten sind nur von den Kräften und von der Lage des Ursprungs O abhängig, die beiden letzten von dem Systeme der Verschiebungen.

Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, mögen sie nun in dieselbe Gerade fallen oder nicht, haben entgegengesetzt gleiche Vectoren, die sich also in der Summe $\overline{R} = \Sigma\overline{VF}$ aufheben. Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, deren Richtungslinien zusammenfallen, haben überdies entgegengesetzt gleiche Rotationsmomente, die in der Summe $\overline{K} = \Sigma\overline{MF}$ sich aufheben. In dem Ausdruck (20) der totalen Arbeit verschwindet also die Arbeit der Kräfte erster Art bezüglich der Translationsverschiebung; die Arbeit der Kräfte zweiter Art aber verschwindet ganz.

Man hat daher den Satz: *Der Hauptvector, das Hauptmoment und die totale Arbeit aller Kräfte in Bezug auf Verschiebungen, die die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von einander nicht ändern, sind unabhängig von den inneren Kräften, die dem dritten Newton'schen Gesetze, d. h. dem Gesetze der Gleichheit von Action und Reaction unterworfen sind. Diese Grössen können nur von äusseren oder von solchen inneren Kräften abhängen, die jenem Gesetze nicht unterworfen sind.*

Wenn die gegebenen Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... an einem und demselben Punkte m angreifen, so haben sie eine Resultante $\overline{P} = \Sigma\overline{F}$, und die totale Arbeit $\Sigma\overline{F\varepsilon}$ bezüglich einer Verschiebung $\overline{\varepsilon}$ des gemeinsamen Angriffspunktes m ist, wie oben bewiesen, gleich der Arbeit der Resultante, d. h. gleich $\overline{P\varepsilon}$; dabei ist $\overline{R} = \overline{P}$ für jeden Ursprung O. Wendet man die Gleichung

$$\overline{\Sigma F\varepsilon} = \overline{P\varepsilon}$$

auf eine Rotationsverschiebung um O mit der Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$ an, so ergiebt sich:

$$\overline{\sigma\Sigma \overline{MF}} = \overline{\sigma MP}.$$

Soll diese Gleichung für jedes σ bestehen, so muss

$$\Sigma\overline{MF} = \overline{MP}$$

sein, d. h. es muss das Hauptmoment $\overline{K}$ gleich dem Momente der Resultante $\overline{P}$ sein.

Dies geht auch daraus hervor, dass die Rotationsgeschwindigkeiten MF, MF', MF'', ... des Punktes O mit den Winkelgeschwindigkeiten $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, ... sich zu einer einzigen Rotationsgeschwindigkeit von der Winkelgeschwindigkeit $\overline{P} = \Sigma\overline{F}$ zusammensetzen.

60. Wenn sich ein System von materiellen Punkten $m, m', m'', \ldots$ infolge der Einwirkung äusserer und innerer Kräfte bewegt und zur Zeit t die Beschleunigungen erster Ordnung $v_1, v_1', v_1'', \ldots$ hat, so sind $\overline{mv_1}$, $\overline{mv_1'}$, $\overline{mv_1''}$ ... die Kräfte, welche jene Beschleunigungen hervorbringen und man nennt sie daher *bewegende Kräfte.* Jede bewegende Kraft ist die geometrische Summe aller auf ihren Angriffspunkt wirkenden, inneren und äusseren Kräfte.

Bezeichnet man allgemein mit $(m^{(p)}m^{(q)})$ die Kraft, mit welcher der Punkt $m^{(q)}$ auf $m^{(p)}$ einwirkt, und mit $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, ... die äusseren Kräfte, so hat man:

$$\begin{aligned} \overline{mv_1} &= \overline{F} + \overline{(mm')} + \overline{(mm'')} + \cdots, \\ \overline{m'v_1'} &= \overline{F'} + \overline{(m'm)} + \overline{(m'm'')} + \cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned} \qquad (21)$$

daher ist:

$$\begin{aligned}
(\overline{Vmv_1}) &= \overline{VF} + \overline{V(mm')} + \overline{V(mm'')} + \cdots,\\
\overline{V(m'v'_1)} &= \overline{VF'} + \overline{V(m'm)} + \overline{V(m'm'')} + \cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
\overline{M(mv_1)} &= \overline{MF} + \overline{M(mm')} + \overline{M(mm'')} + \cdots,\\
\overline{M(m'v'_1)} &= \overline{MF'} + \overline{M(m'm)} + \overline{M(m'm'')} + \cdots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

hieraus folgt:

$$\overline{R} = \Sigma\overline{V(mv_1)} = \Sigma\overline{F},\ \overline{K} = \Sigma\overline{M(mv_1)} = \Sigma\overline{MF}.$$

Diese Formeln zeigen, dass *alle bewegenden Kräfte* $\overline{mv_1}$, $\overline{m'v'_1}, \ldots$ *denselben Hauptvector und dasselbe Hauptmoment haben, wie das System aller sie bildenden Kräfte; dabei verschwinden in der geometrischen Summe die Vectoren und Momente aller inneren Kräfte.*

Multiplicirt man die Kräfte (21) geometrisch mit beliebigen Verschiebungen $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$, $\overline{\varepsilon''}$, ... ihrer Angriffspunkte und summirt die Producte, so erhält man die totale Arbeit der bewegenden Kräfte

$$\Sigma\overline{mv_1\cdot\varepsilon} = \Sigma\overline{F\varepsilon} + \Sigma[(mm')\varepsilon + m'm)\varepsilon'], \tag{22}$$

wo das zweite Summenzeichen Σ rechts bedeutet, dass alle möglichen Punktpaare zu bilden sind. Für Verschiebungen $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$, $\overline{\varepsilon''}$, ..., die die Abstände der Punkte nicht ändern, ist diese Summe nach dem Obigen gleich Null; folglich ist dann

$$\Sigma\overline{mv_1\cdot\varepsilon} = \Sigma\overline{F\varepsilon} = \overline{\alpha R} + \overline{\sigma K}, \tag{23}$$

wo $\overline{\alpha}$ eine beliebige Translationsverschiebung und $\overline{\sigma}$ eine beliebige Winkelverschiebung bedeutet.

Sind alle auf das Punktsystem m, m', m'', ... wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, so sind die Kräfte $\overline{mv_1}$, $\overline{mv'_1}$, ... gleich Null; daher ergiebt sich aus Gleichung (22)

$$\Sigma\overline{F\varepsilon} + \Sigma[(mm')\varepsilon + (m'm)\varepsilon'] = 0 \tag{24}$$

für irgend welche Verschiebungen $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$, $\overline{\varepsilon''}$, ... Umgekehrt, wenn die Gleichung (24) für beliebige Verschiebungen $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon'}$, $\overline{\varepsilon''}$, ... besteht, so ist

$$\Sigma \overline{m v_1 \cdot \varepsilon} = 0$$

für beliebige $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$, wozu erforderlich ist, dass $mv_1 = 0$, $mv'_1 = 0, \cdots$.

Für das Gleichgewicht der äusseren und inneren Kräfte, die auf ein beliebiges Punktsystem wirken, ist also nothwendig und hinreichend, dass die totale Arbeit bezüglich irgend welcher Verschiebungen gleich Null ist.

Bei Verschiebungen $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$, die die Abstände der Punkte nicht ändern, giebt Gleichung (24) oder (23)

$$\overline{\alpha R} + \overline{\sigma K} = 0$$

für beliebige $\overline{\alpha}$ und $\overline{\sigma}$; hierzu ist aber erforderlich, dass $R = 0$ und $K = 0$ ist.

Also *für das Gleichgewicht der äusseren und inneren Kräfte ist nothwendig, dass der Hauptvector und das Hauptmoment aller Kräfte gleich Null seien.*

Doch ist diese Bedingung für das Gleichgewicht noch nicht hinreichend, wenn die Abstände der Punkte sich ändern können; denn wenn $R = 0$ und $K = 0$ ist, so folgt aus Gleichung (22) nur, dass die Arbeit aller bewegenden Kräfte gleich Null ist für Verschiebungen, die die Abstände der Punkte von einander nicht ändern; diese Arbeit kann jedoch für andere Verschiebungen von Null verschieden sein, und man darf folglich noch nicht schliessen, dass $mv_1 = 0$, $mv'_1 = 0, \ldots$ sei.

61. Es lässt sich beweisen, dass die Bedingungen $R = 0$, $K = 0$ für das Gleichgewicht der Kräfte genügend sind, wenn das System der Angriffspunkte $m, m', m'', \ldots$ ein *unveränderliches* ist, d. h. wenn es einem vollkommen starren Körper angehört. Solche Körper existiren zwar in der Natur nicht; doch ist es sehr häufig erlaubt, die äusserst kleinen Aenderungen der Abstände der Theilchen der Naturkörper zu vernachlässigen und diese Körper bei den meisten Untersuchungen über das Gleichgewicht der auf sie wirkenden Kräfte durch fingirte, vollkommen starre Körper zu ersetzen; dann repräsentiren die Angriffspunkte der Kräfte ein unveränderliches System.

Um nun zu beweisen, dass die Bedingungen $R = 0$ und $K = 0$ für das Gleichgewicht der zugleich mit den inneren

Kräften auf ein unveränderliches System $m, m', m'', \ldots$ wirkenden Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ hinreichend sind, hat man zu zeigen, dass die zur Zeit t in Ruhe befindlichen Punkte $m, m', m'', \ldots$ durch die Einwirkung aller Kräfte auf sie nur eine derartige Bewegung erhalten können, bei der alle der Zeit t entsprechenden Beschleunigungen erster Ordnung $\overline{v_1}, \overline{v_1'}, \overline{v_1''}, \ldots$ gleich Null sind.

Sind nun $\overline{v_1}, \overline{v_1'}, \overline{v_1''}, \ldots$ die Beschleunigungen erster Ordnung bei der Bewegung der Punkte $m, m', m'', \ldots$, so kann man für die Verschiebungen $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$ die Elementarverschiebungen zweiter Ordnung während der Zeit τ

$$\overline{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\,\overline{v_1}\tau^2, \quad \overline{\varepsilon'} = \tfrac{1}{2}\,\overline{v_1'}\tau^2, \ldots$$

wählen. Da die Arbeit der inneren Kräfte für diese Verschiebungen gleich Null ist, so gilt hier die Gleichung (22), die die Gestalt annimmt

$$\tfrac{1}{2}\,\tau^2 \Sigma m v_1^2 = \overline{\alpha R} + \overline{\sigma K}, \tag{25}$$

wo $\overline{\alpha}$ und $\overline{\sigma}$ die Translations- und die Winkelverschiebung in dem Systeme der wirklichen Verschiebungen $\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon'}, \overline{\varepsilon''}, \ldots$ sind.

Aus dieser Gleichung folgt, dass, wenn $R = 0$ und $K = 0$ ist, auch $\Sigma m v_1^2 = 0$ wird. Hierzu ist aber erforderlich, dass $v_1 = 0,\ v_1' = 0, \cdots$ Folglich sind alle Kräfte (20) gleich Null, und deshalb halten sich alle auf die einzelnen Punkte $m, m', m'', \ldots$ wirkenden Kräfte zur Zeit t wenigstens momentan das Gleichgewicht.

Zum Gleichgewicht aller auf ein unveränderliches Punktsystem wirkenden Kräfte ist also nothwendig und hinreichend, dass der Hauptvector und das Hauptmoment aller Kräfte gleich Null sind.

Da die Vectoren und Momente der nach dem Gesetze der Gleichheit von Action und Reaction wirkenden inneren Kräfte in die Ausdrücke für $\overline{R}$ und $\overline{K}$ nicht eingehen, so nennt man gewöhnlich die Gleichungen $R = 0$ und $K = 0$ die Bedingungen des Gleichgewichts der äusseren Kräfte.*)

*) Zu diesen Kräften hat man auch diejenigen Kräfte wechselseitiger Einwirkungen zu rechnen, die, obwohl gleich und entgegengesetzt, doch

Ausser dem unveränderlichen Punktsystem betrachtet man in der Mechanik noch andere fingirte Punktsysteme (vergl. Kinematik, Cap. XIII), deren mögliche Verschiebungen durch Gleichungen oder Ungleichungen bedingt sind. Wir werden später sehen, dass für solche Systeme zu den Bedingungen $R = 0, K = 0$ noch specielle Bedingungen hinzutreten, die von der Art der Bedingungen für die möglichen Verschiebungen abhängen.

62. Es seien x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes einer Kraft F in Bezug auf drei rechtwinklige Axen Ox, Oy, Oz; X, Y, Z die Projectionen der Kraft auf diese Axen und $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ die Projectionen der Verschiebung $\bar{\varepsilon}$ des Punktes (x,y,z). Dieses $\bar{\varepsilon}$ gehöre zu einem Systeme von Verschiebungen $\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\varepsilon}'', \ldots$, die die Abstände der Punkte $m, m', m'', \ldots$ nicht ändern und die sich in eine Translationsverschiebung $\bar{\alpha}$ und eine Rotationsverschiebung von der Winkelverschiebung $\bar{\sigma}$ zerlegen lassen; endlich seien $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ die Projectionen von $\bar{\alpha}$ und p, q, r die von $\bar{\sigma}$ auf die Axen Ox, Oy, Oz.

Nach den Formeln von Euler (s. Kinematik § 143, S. 302 und 303) hat man nun:

$$\varepsilon_x = \alpha_x + \begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_y = \alpha_y + \begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_z = \alpha_z + \begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix}.$$

Daher ergiebt sich für die Elementararbeit der Kraft $\bar{F}$ die Formel:

$$\begin{aligned} \overline{F\varepsilon} &= X\varepsilon_x + Y\varepsilon_y + Z\varepsilon_z \\ &= X\alpha_x + Y\alpha_y + Z\alpha_z + X\begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix} + Y\begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Hierin drücken die ersten drei Glieder die Arbeit bezüglich der Translationsverschiebung aus, d. h. es ist

$$\overline{F\alpha} = X\alpha_x + Y\alpha_y + Z\alpha_z,$$

während die übrigen die Arbeit bezüglich der Rotationsverschiebung repräsentiren, nämlich:

---

nicht in dieselbe Gerade fallen, wie z. B. die Kräfte der gegenseitigen Wirkung eines Stromelements und eines Magnetelementes auf einander nach dem Ampère'schen Gesetze.

$$\overline{F\beta} = X\begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix} + Y\begin{vmatrix} r & p \\ z & x \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix};$$

dies lässt sich auch schreiben:

$$\overline{F\beta} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Diese Determinante drückt bekanntlich das Volumen des Parallelepipedons aus, das den Ursprung O zu einem Eckpunkte hat und dessen in diesem Punkte zusammenstossende Kanten die Elemente der drei Zeilen der Determinante zu Projectionen auf die Axen Ox, Oy, Oz haben; diese Kanten sind nämlich: 1) der Vector VF, dessen Projectionen X, Y, Z sind, 2) die Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$ mit den Projectionen p, q, r und 3) der Radiusvector Om des Angriffspunktes der Kraft, der x, y, z zu Projectionen hat. Dies stimmt auch mit dem in § 59 Bewiesenen überein.

Man kann den Ausdruck (26) auch als lineare Function der drei Grössen p, q, r darstellen, indem man schreibt:

$$\overline{F\beta} = p\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}.$$

Die Determinanten zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

sind die Projectionen des Rotationsmomentes $K = MF$ auf die Axen Ox, Oy, Oz (s. die zweite Anmerkung auf S. 58 der Kinematik); daher ist

$$\overline{F\beta} = pK\cos(Kx) + qK\cos(Ky) + rK\cos(Kz) = \overline{\sigma \cdot MF},$$

was wiederum mit § 59 übereinstimmt.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (26), so folgt:

$$\overline{\sigma \,.\, MF} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Hieraus ergiebt sich der folgende Ausdruck für das Volumen des Tetraeders, dessen gegenüberliegende Kanten $\overline{F}$ und $\overline{\sigma}$ sind:

$$(F, \sigma) = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Dividirt man die Elemente der ersten Zeile der Determinante (26) durch F, die der zweiten durch σ, so erhält man einen Ausdruck für das relative Moment der Richtungslinien von $\overline{F}$ und $\overline{\sigma}$:

$$\binom{F}{\sigma} = \begin{vmatrix} \cos(Fx), & \cos(Fy), & \cos(Fz) \\ \cos(\sigma x), & \cos(\sigma y), & \cos(\sigma z) \\ x, & y, & z \end{vmatrix}.$$

Für eine Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$, deren Ursprung in einem Punkte O' (x', y', z') ist, erhält die Rotationsarbeit der Kraft F den Ausdruck:

$$\overline{\sigma . M'F} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x - x', & y - y', & z - z', \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & r \\ X & Y & Z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt Gleichung (14)

$$\overline{\sigma \cdot M'F} = \overline{V\sigma \cdot MF} + \overline{VF \cdot M\sigma},$$

die, durch F und σ dividirt, in Gleichung (15) übergeht:

$$\binom{F}{\sigma} = \binom{F}{V\sigma} + \binom{\sigma}{VF}.$$

Die Bedingung dafür, dass die Richtungslinien von $\overline{F}$ und $\overline{\sigma}$ in eine Ebene fallen, lässt sich durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ p & q & r \\ x - x' & y - y' & z - z' \end{vmatrix} = 0$$

ausdrücken.

Die 6 Grössen

$$X, \; Y, \; Z, \; \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \qquad (28)$$

sind die Plücker'schen (Stralen-) Coordinaten der Richtungslinie der Kraft F;*) zwischen ihnen besteht die Gleichung

$$X \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + Y \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = 0,$$

welche ausdrückt, dass der Vector $\overline{VF}$ auf dem Momente $\overline{MF}$ senkrecht steht (wie die Gleichung $\overline{VF . MF} = 0$ auf S. 271).

Für einen anderen Ursprung O' (x', y', z') des Vectors

*) Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, 1868.

und des Moments bleiben die drei ersten Coordinaten (28) dieselben, während die drei letzten übergehen in

$$\begin{vmatrix} y-y', & z-z' \\ Y, & Z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z-z', & x-x' \\ Z, & X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x-x', & y-y' \\ X, & Y \end{vmatrix}.$$

Da

$$\begin{vmatrix} y-y', & z-z' \\ Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y' & z' \\ Y & Z \end{vmatrix},$$

so ist die Projection des neuen Moments $M'F$ auf die Axe Ox gleich der Projection des früheren Moments MF weniger das Moment des neuen Vectors $V'F$. Soll dies für jede Axe Ox gelten, so muss

$$\overline{M'F} = \overline{MF} - \overline{M(V'F)}$$

sein, was mit Formel (18) übereinstimmt.

Es seien nun

$$(x, y, z), (x', y', z'), \ldots$$

die Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte $\overline{F}, \overline{F}', \ldots$;

$$(X, Y, Z), (X', Y', Z'), \ldots$$

die Projectionen dieser Kräfte auf die Axen Ox, Oy, Oz und $\overline{R}$, $\overline{K}$ der Hauptvector und das Hauptmoment dieses Kräftesystems. Da

$$\overline{R} = \overline{\Sigma VF}, \quad \overline{K} = \overline{\Sigma MF}$$

ist, so wird:

$$\left.\begin{aligned} R\cos(Rx) = \Sigma X, \quad R\cos(Ry) = \Sigma Y, \quad R\cos(Rz) = \Sigma Z; \\ K\cos(Kx) = \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \\ K\cos(Ky) = \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad K\cos(Kz) = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{28a}$$

Hiernach kann man mit Hilfe der Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte und der Projectionen der Kräfte auf die Coordinatenaxen die Projectionen des Hauptvectors und des Hauptmoments auf dieselben Axen berechnen, wodurch dann Grösse und Richtung jedes dieser beiden Argumente des gegebenen Kräftesystems bestimmt sind.

Da die Arbeit einer einzelnen Kraft durch die Formel

$$\overline{F\varepsilon} = X\alpha_x + Y\alpha_y + Z\alpha_z + p\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

ausgedrückt ist, so ergiebt sich für die totale Arbeit aller Kräfte der Ausdruck

$$\Sigma \overline{F\varepsilon} = \alpha_x \Sigma X + \alpha_y \Sigma Y + \alpha_z \Sigma Z$$
$$+ p\Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + q\Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + r\Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}, \qquad (29)$$

der mit dem Ausdruck (20) gleichwerthig ist.

Die Gleichgewichtsbedingungen $\overline{R} = 0$ und $\overline{K} = 0$ lassen sich durch die Bedingungen ersetzen, dass die Projectionen jedes der beiden Argumente $\overline{R}$ und $\overline{K}$ auf die Axen Ox, Oy, Oz gleich Null sind, d. h. durch die 6 Gleichungen:

$$\Sigma X = 0, \ \Sigma Y = 0, \ \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = 0, \ \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} = 0, \ \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = 0. \qquad (30)$$

Diese Gleichungen sind für das Gleichgewicht der Kräfte erforderlich, wie das System der Angriffspunkte der Kräfte auch beschaffen sein mag. Sie sind hinreichend für das Gleichgewicht von Kräften, die an einem unveränderlichen Punktsystem angreifen.

Die Gleichungen (30) drücken folgende Eigenschaft der Richtungslinien der Kräfte aus. *Die sechs Summen, die sich aus den gleichnamigen Stralencoordinaten der Richtungslinien aller Kräfte bilden lassen, sind gleich Null.*

Die Plücker'schen Stralencoordinaten lassen sich durch andere, allgemeinere und homogene Coordinaten ersetzen.*)

Wählen wir als neue geradlinige Coordinaten des Punktes (x, y, z) die drei linearen Functionen

$$q_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1,$$
$$q_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2,$$
$$q_3 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3,$$

wo α_i, β_i, γ_i, δ_i willkürliche Constante sind, die nur der Bedingung genügen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (31)$$

*) Math. Annalen, herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann, B. I. u. II. — Analytische Geometrie des Raumes von G. Salmon, deutsch bearbeitet von W. Fiedler, I. Th., Art. 51 (2. Aufl., 1874).

nicht gleich Null ist. Bezeichnen wir die Differenzen zwischen den entsprechenden neuen Coordinaten des Endpunktes und des Anfangspunktes der Kraft $\overline{F}$ mit Q_1, Q_2, Q_3, so wird:

$$Q_1 = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z,$$
$$Q_2 = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z,$$
$$Q_3 = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z.$$

Die 6 Grössen

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ Q_2 & Q_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} q_3 & q_1 \\ Q_3 & Q_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} \tag{32}$$

lassen sich als neue Stralencoordinaten der Richtungslinie der Kraft $\overline{F}$ betrachten. Bildet man für jede der gegebenen Kräfte solche Coordinaten und summirt die gleichnamigen Coordinaten, so folgt allgemein:

$$\Sigma Q_i = \alpha_i \Sigma X + \beta_i \Sigma Y + \gamma_i \Sigma Z,$$

$$\Sigma \begin{vmatrix} q_i & q_k \\ Q_i & Q_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_i & \gamma_i \\ \beta_k & \gamma_k \end{vmatrix} \cdot \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_i & \alpha_i \\ \gamma_k & \alpha_k \end{vmatrix} \cdot \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{vmatrix} \cdot \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} \delta_i & \alpha_i \\ \delta_k & \alpha_k \end{vmatrix} \cdot \Sigma X + \begin{vmatrix} \delta_i & \beta_i \\ \delta_k & \beta_k \end{vmatrix} \cdot \Sigma Y + \begin{vmatrix} \delta_i & \gamma_i \\ \delta_k & \gamma_k \end{vmatrix} \cdot \Sigma Z.$$

Man sieht hieraus, dass die Gleichungen (30) durch die Transformation übergehen in:

$$\Sigma Q_1 = 0,\ \Sigma Q_2 = 0,\ \Sigma Q_3 = 0,$$
$$\Sigma \begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ Q_2 & Q_3 \end{vmatrix} = 0,\ \Sigma \begin{vmatrix} q_3 & q_1 \\ Q_3 & Q_1 \end{vmatrix} = 0,\ \Sigma \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{33}$$

Umgekehrt müssen, da die Determinante (31) nicht gleich Null ist, die Gleichungen (30) bestehen, wenn die Gleichungen (33) erfüllt sind.

Die Grössen q_1, q_2, q_3 können irgend welche, recht- oder schiefwinklige geradlinige Coordinaten in Bezug auf Axen, deren Ursprung ganz beliebig ist, vorstellen. Sie können auch als die kürzesten Abstände des Punktes von drei gegebenen Ebenen

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0,$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0,$$
$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 = 0$$

betrachtet werden.

63. Auf Grund der Formel (9), S. 271, für die Arbeit einer einzelnen Kraft bezüglich einer Rotationsverschiebung und der Formel (12), S. 273, lässt sich ein Ausdruck für die

totale Arbeit eines Kräftesystems $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ bezüglich einer Rotationsverschiebung der Angriffspunkte mit der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\sigma}$ aufstellen, nämlich

$$\overline{K\sigma} = \sigma\Sigma\binom{F}{\sigma}F,$$

wo $\binom{F}{\sigma}$ das relative Moment der Richtungslinien der Kraft $\overline{F}$ und der Winkelverschiebung $\overline{\sigma}$, d. h. der Momentanaxe der Rotation ist. Nach Division durch σ ergiebt sich hieraus der folgende Ausdruck für die Projection des Hauptmoments auf eine beliebige durch den Ursprung O gehende Gerade $\overline{\sigma}$:

$$K\cos(K\sigma) = \Sigma F\binom{F}{\sigma}. \tag{34}$$

Die Projection des Hauptmoments eines Kräftesystems auf eine beliebige durch den Ursprung der Momente gehende Axe ist also gleich der algebraischen Summe aller Kräfte, jede multiplicirt mit dem entsprechenden relativen Momente der Richtungslinie der Kraft und der Projectionsaxe, oder kürzer *gleich der algebraischen Summe der Momente aller Kräfte bezüglich der Projectionsaxe.*

Im Falle $K = 0$ ist, hat man

$$\Sigma F\binom{F}{\sigma} = 0, \tag{35}$$

d. h. *im Falle des Gleichgewichts der Kräfte ist die algebraische Summe der Momente aller Kräfte bezüglich einer beliebigen Axe gleich Null.*

Wendet man die Gleichung (35) auf die drei Axen Ox, Oy, Oz an, so erhält man die drei letzten der Gleichungen (30), die man somit schreiben kann:

$$\Sigma F\binom{F}{x} = 0, \quad \Sigma F\binom{F}{y} = 0, \quad \Sigma F\binom{F}{z} = 0.$$

64. Die Gleichung (35) kann in einem Falle auch erfüllt sein, ohne dass die Kräfte im Gleichgewicht sind und ohne dass ihr Moment $\overline{K}$ gleich Null ist, nämlich wenn man für die Axe $\overline{\sigma}$ eine zu $\overline{K}$ senkrechte Gerade wählt. Alle solche Geraden liegen in einer Ebene, die Möbius*) die *Nullebene* genannt hat. Den Punkt O dieser Ebene, der der Ursprung der Momente ist, nennt er den *Nullpunkt der Ebene.*

---

*) Lehrbuch der Statik (1837), 1. Th., § 84 (S. 145).

Da die Lage des Punktes O im Raume willkürlich ist, so *kann man durch jeden Punkt des Raumes unzählig viele Gerade hindurchlegen, die alle die Eigenschaft haben, dass die algebraische Summe der Momente der Kräfte bezüglich jeder solchen Geraden gleich Null ist.*

Man sieht leicht, dass alle diese Geraden Stralen des Complexes $[K, R]$ sind, der das Hauptmoment $\overline{K}$ und den Hauptvector $\overline{R}$ zu Parametern hat (vgl. Kinematik § 180, S. 380).

Verlegt man nämlich den Momentenursprung von O nach O' und bezeichnet mit $M'F$ und K' das Moment der Kraft $\overline{F}$ und das Hauptmoment bezüglich des neuen Ursprungs, so hat man nach Formel (14):

$$\overline{\sigma \,.\, M'F} = \overline{M\sigma \,.\, VF} + \overline{V\sigma \,.\, MF};$$

folglich ist

$$\overline{\sigma \Sigma \overline{M'F}} = \overline{M\sigma \,.\, \Sigma \overline{VF}} + \overline{V\sigma \,.\, \Sigma \overline{MF}},$$

d. h.

$$\overline{\sigma K'} = \overline{M\sigma \,.\, R} + \overline{V\sigma \,.\, K}.$$

Für eine zu $\overline{K'}$ senkrechte Gerade $\overline{\sigma}$ ist die linke Seite dieser Gleichung Null, also:

$$\overline{R \,.\, M\sigma} + \overline{V\sigma \,.\, K} = 0. \tag{36}$$

Diese Gleichung zwischen den Argumenten $V\sigma$ und $M\sigma$ der Geraden $\overline{\sigma}$ stellt den Liniencomplex $[K, R]$ dar, dessen Parameter für den Ursprung O die Grössen $\overline{K}$ und $\overline{R}$ sind. Alle durch einen beliebigen Punkt O' gehenden Stralen dieses Complexes liegen in einer Ebene, welche die Nullebene ist. Der Punkt O' ist der Nullpunkt dieser Ebene.

Bezeichnen A, B, C die Projectionen des Hauptvectors $\overline{R}$ auf die Axen Ox, Oy, Oz; L, M, N die des Hauptmoments $\overline{K}$; α, β, γ die des Vectors $V\sigma$ und λ, μ, ν die von $M\sigma$, so kann man Gleichung (36) in der Form

$$A\lambda + B\mu + C\nu + L\alpha + M\beta + N\gamma = 0$$

schreiben, die linear und homogen in Bezug auf die 6 Coordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ eines beliebigen Strales des Complexes $[K, R]$ ist.

Die Gleichung (36), die eine von dem Ursprung O unab-

hängige Form hat, kann man als Gleichung desselben Complexes ansehen. Dividirt man sie durch 6, so ergiebt sich die Gleichung

$$\Sigma(F, \sigma) = 0,$$

welche die folgende Eigenschaft der Stralen eines Complexes ausdrückt:

Die algebraische Summe der Volumina der Tetraeder, die man aus jeder Kraft und einem beliebigen, auf irgend einem Strale gewählten Abschnitte als gegenüber liegenden Tetraederkanten construiren kann, ist gleich Null.

65. Ein und dasselbe Kräftesystem $F, F', F'', \ldots$ hat für verschiedene Anfangspunkte auch verschiedene Hauptvectoren und Hauptmomente. Alle Hauptvectoren sind einander geometrisch gleich und unterscheiden sich nur durch die Lage des Anfangspunktes; die, zwei verschiedenen Anfangspunkten O und O' entsprechenden Hauptmomente $\overline{K}, \overline{K}'$ aber können nach Grösse und Richtung verschieden sein.

Wir haben oben (S. 274 Formel (18)) gesehen, dass die Momente MF und $M'F$ einer Kraft $\overline{F}$ für zwei verschiedene Anfangspunkte O und O' durch die Bedingung

$$\overline{M'F} = \overline{MF} - \overline{M(\overline{V'F})}$$

verbunden sind. Wendet man diese Formel auf jede der Kräfte $\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}'', \ldots$ an und bildet die geometrische Summe der so erhaltenen Resultate, so ergiebt sich

$$\overline{\Sigma \overline{M'F}} = \overline{\Sigma \overline{MF}} - \overline{M \Sigma \overline{V'F}},$$

wo $\Sigma \overline{M'F}$ das Hauptmoment $\overline{K}$ für den Ursprung O', $\Sigma \overline{MF}$ das Hauptmoment für den Ursprung O und $\Sigma \overline{M(\overline{V'F})} = \overline{M\Sigma \overline{V'F}}$ das für den Punkt O gebildete Moment der geometrischen Summe aller dem Ursprunge O' entsprechenden Vectoren, d. h. das Moment des dem Ursprunge O' entsprechenden Hauptvectors $\overline{R}'$ bezüglich O ist. Man hat also:

$$\overline{K}' = \overline{K} - \overline{MR'}. \tag{37}$$

Ferner ist aber:

$$\overline{R}' = \overline{R}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen geometrisch, so folgt:

$$\overline{K'R'} = \overline{KR} - \overline{\overline{MR'}.\overline{R}}.$$

Da $\overline{MR'}$ auf $\overline{R}$ senkrecht steht, so fällt das letzte Glied fort und es bleibt:

$$\overline{K'R'} = \overline{KR}. \tag{38}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass *das geometrische Product des Vectors und des Hauptmomentes von der Lage des zum Ursprung dieser Argumente gewählten Punktes nicht abhängt.* Daher kann man dieses geometrische Product die *Invariante des gegebenen Kräftesystems* nennen.

Die Invariante eines Kräftesystems ist abhängig *von der Grösse der Kräfte, von ihren Richtungen und von der relativen Lage ihrer Richtungslinien gegen einander.*

Diese Abhängigkeit ist durch die Formel

$$\overline{R}\overline{K} = \Sigma FF'\left(\frac{F}{F'}\right) \tag{39}$$

ausgedrückt, die man folgendermassen erhält. Man multiplicire die beiden Grössen

$$\overline{R} = \Sigma \overline{VF},\ \overline{K} = \Sigma \overline{MF}$$

geometrisch mit einander und substituire in das Product

$$\overline{RK} = \Sigma\Sigma[\overline{\overline{VF}.\overline{MF'}} + \overline{\overline{VF'}.\overline{MF}}],$$

in dem $\Sigma\Sigma$ eine über alle Paare von Kräften ausgedehnte Summation anzeigt, für das Binom $\overline{\overline{VF}.\overline{MF'}} + \overline{\overline{VF'}.\overline{MF}}$ die ihm gleiche Grösse $FF'\left(\frac{F}{F'}\right)$ (vergl. Formel (14), S. 274, und Formel (12), S. 273).

Die Gleichung (39) zeigt, dass *die Invariante des Kräftesystems gleich ist der Summe der Producte aus je zwei Kräften in das relative Moment ihrer Richtungslinien.*

Dividirt man Gleichung (39) durch 6, so findet man:

$$\tfrac{1}{6}\overline{RK} = \Sigma\Sigma(F, F'),$$

d. h. *der sechste Theil der Invariante ist gleich der algebraischen Summe der Volumina aller aus je zwei Kräften als Gegenkanten construirbaren Tetraeder.*

Dividirt man die Invariante

$$\overline{RK} = RK \cos(RK)$$

durch R, so bleibt $K \cos(KR)$, d. h. die Projection des Haupt-

momentes auf den Hauptvector. Diese Projection ist gleichfalls von dem Ursprunge der Vectoren und Momente unabhängig. Die Formel (34) giebt:

$$K \cos(KR) = \Sigma F \binom{F}{R},$$

d. h. *die Projection des Hauptmomentes auf den Hauptvector ist gleich der Summe der Momente der Kräfte bezüglich des Hauptvectors, d. h. gleich der Summe der Producte aus den Kräften in die entsprechenden relativen Momente des Hauptvectors und der Richtungslinien der Kräfte.*

Nach derselben Formel ist auch

$$\tfrac{1}{6} \overline{RK} = \Sigma(R, F),$$

d. h. *der sechste Theil der Invariante ist gleich der Summe der Volumina derjenigen Tetraeder, die zur gemeinsamen Kante den Hauptvector und zu Gegenkanten die gegebenen Kräfte haben.*

Die Projection des Hauptmomentes auf den Hauptvector stellt das minimum minimorum aller Werthe dar, die das Hauptmoment für verschiedene Anfangspunkte annimmt; denn für jeden Ursprung O' hat man

$$\pm K' \cos(K'R) \leqq K' \quad \text{oder} \quad \pm K \cos(KR) < K';$$

ferner ist

$$K' = \pm K \cos(KR),$$

wenn $\cos(K'R) = \pm 1$ ist. *Wenn also der Hauptvector und das Hauptmoment in dieselbe Gerade fallen, so erhält das Hauptmoment seinen Minimalwerth, der gleich der Projection eines beliebigen Hauptmomentes auf den Hauptvector ist, oder gleich dem absoluten Werthe der Invariante* ($\pm \overline{RK}$), *dividirt durch den Hauptvector.*

Die Richtungslinie des kleinsten Hauptmomentes heisst die *Centralaxe des Kräftesystems.* Sie ist zugleich die Axe des Liniencomplexes $[\overline{K}, \overline{R}]$ (vergl. Kinematik § 177).

Hat man $\overline{R}$ und $\overline{K}$ für einen beliebigen Ursprung O bestimmt, so kann man diese Axe construiren, wie in § 177 der Kinematik gezeigt wurde.

Da der neue Hauptvector $\overline{R'}$ längs dieser Centralaxe gerichtet sein muss, so sind die Argumente dieser Geraden für den Ursprung O:

$$VR' = R \text{ und } MR'.$$

Das erste dieser Argumente ist bekannt; suchen wir nun das zweite zu bestimmen. Nach Formel (37) ist

$$\overline{MR'} = \overline{K} - \overline{K'};$$

ferner ist MR' senkrecht zu dem kleinsten Hauptmomente $\overline{K'}$, da $\overline{K'}$ und $\overline{R'}$ in dieselbe Gerade fallen. Da aber

$$K' = \pm K \cos(KR)$$

ist, so ist MR' die Projection des Hauptmomentes $\overline{K}$ auf eine in der Ebene der Geraden $\overline{R}$ und $\overline{K}$ im Punkte O auf $\overline{R}$ errichtete senkrechte Gerade; daher wird:

$$MR' = K \sin(KR).$$

Kennt man die Argumente VR' und MR', so bestimmt sich die Lage von R', d. h. der Centralaxe, in bekannter Weise (vergl. § 180 der Kinematik); man errichtet nämlich in O eine Senkrechte auf der Ebene der Geraden $\overline{R}$ und $\overline{K}$ und trägt auf ihr eine Strecke

$$q = \frac{K \sin(KR)}{R}$$

auf, so dass dieselbe für einen auf MR' hinschauenden Beobachter $\overline{R}$ nach rechts gerichtet erscheint; dann legt man durch den Endpunkt dieser Strecke $\overline{q}$ eine Parallele zu dem Hauptvector $\overline{R}$. Auf dieser Geraden hat man von einem beliebigen Punkte O' aus den Vector $\overline{R'} = \overline{R}$ und das kleinste Hauptmoment

$$K' = \pm K \cos(KR)$$

in demselben Sinne wie $\overline{R'}$ aufzutragen, wenn $\cos(KR) > 0$ und im entgegengesetzten, wenn $\cos(KR) < 0$ ist. Es kann auch der Fall eintreten, dass $\cos(KR) = 0$ wird, d. h. dass für einen gewissen Ursprung das Hauptmoment zu dem Hauptvector senkrecht ist. Dann ist $\sin(KR) = 1$ und $MR' = \overline{K}$. Folglich sind der Hauptvector $\overline{R}$ und das Hauptmoment $\overline{K}$ die Argumente des neuen Hauptvectors $\overline{R'}$; daher bestimmt sich aus ihnen nach der obigen Construction die Lage der Centralaxe. Für jeden auf ihr gelegenen Punkt O' ist das Hauptmoment K' gleich Null.

Endlich kann der Fall $R = 0$ eintreten; dann ist auch

$\overline{R'} = 0$ und $\overline{K'} = \overline{K}$. *Wenn also die geometrische Summe aller Kräfte gleich Null ist, so ist der Hauptvector für jeden Ursprung gleich Null, und das Hauptmoment ist weder nach Grösse noch nach Richtung von dem Ursprunge abhängig.*

In diesem Falle kann man jede zu dem Hauptmomente $\overline{K}$ parallele Gerade zur Centralaxe wählen.

Die Gleichungen der Centralaxe ergeben sich folgendermassen.

Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Geraden bezüglich der Axen Ox, Oy, Oz; bestimmen wir nun nach den Formeln (28 a.), S. 283, die Projectionen von $\overline{R}$ und $\overline{K}$ auf diese Axen; dieselben sind:

$$A = \Sigma X,\ B = \Sigma Y,\ C = \Sigma Z,$$

$$L = \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix},\ M = \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix},\ N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix};$$

betrachten wir nun den Punkt (ξ, η, ζ) als Ursprung O' des Hauptvectors $\overline{R'}$ und bestimmen wir die Projectionen des Moments MR' auf die Axen Ox, Oy, Oz, so finden wir:

$$\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ B & C \end{vmatrix} = C\eta - B\zeta,\ \begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ C & A \end{vmatrix} = A\zeta - C\xi,\ \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ A & B \end{vmatrix} = B\xi - A\eta.$$

Subtrahirt man diese letzteren Ausdrücke resp. von L, M, N, so erhält man (vergl. Formel (37)) die Projectionen des kleinsten Hauptmoments $\overline{K'}$ auf die Axen Ox, Oy, Oz:

$$L - C\eta + B\zeta,\ M - A\zeta + C\xi,\ N - B\xi + A\eta. \tag{40}$$

Da $\overline{K'}$ und $\overline{R'}$ in dieselbe Gerade fallen, und $\overline{R'} = \overline{R}$ ist, so sind die Projectionen von $\overline{K'}$ denen von $\overline{R}$ proportional; folglich ist:

$$\frac{L - C\eta + B\zeta}{A} = \frac{M - A\zeta + C\xi}{B} = \frac{N - B\xi + A\eta}{C} = \pm \frac{K'}{R}. \tag{41}$$

Diese Proportionalitäten sind die Gleichungen der Centralaxe. Man kann sie auch durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} L - C\eta + B\zeta &= \pm \frac{K'A}{R}, \\ M - A\zeta + C\xi &= \pm \frac{K'B}{R}, \\ N - B\xi + A\eta &= \pm \frac{K'C}{R} \end{aligned} \tag{42}$$

ersetzen. Ausserdem hat man zur Bestimmung des Hauptvectors

$$R = R' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und endlich den Ausdruck für die Invariante

$$\overline{RK} = AL + BM + CN;$$

hieraus ergiebt sich der Ausdruck für das kleinste Moment:

$$K' = \pm \frac{\overline{RK}}{R} = \pm \frac{AL + BM + CN}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ist das kleinste Moment gleich Null, so ist

$$AL + BM + CN = 0,$$

und die Gleichungen (42) gehen über in die folgenden:

$$\begin{aligned} L - C\eta + B\zeta &= 0, \\ M - A\zeta + C\xi &= 0, \\ N - B\xi + A\eta &= 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Man kann den Ausdruck für das kleinste Moment und die Gleichungen der Centralaxe erhalten, indem man nach der allgemeinen Regel die Minimalwerthe des Hauptmomentes bestimmt. Die Grössen (40) sind nämlich die Projectionen des Hauptmomentes K' für einen beliebigen Ursprung O' (ξ, η, ζ); daher ist

$$\begin{aligned} K'^2 = (L - C\eta + B\zeta)^2 \\ + (M - A\zeta + C\xi)^2 \\ + (N - B\xi + A\eta)^2. \end{aligned}$$

Die Bedingungen eines Maximums oder Minimums für K'^2 sind nun

$$\frac{\partial K'^2}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial K'^2}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial K'^2}{\partial \zeta} = 0,$$

d. h.

$$\begin{aligned} (M - A\zeta + C\xi)\, C - (N - B\xi + A\eta)\, B &= 0, \\ (N - B\xi + A\eta)\, A - (L - C\eta + B\zeta)\, C &= 0, \\ (L - C\eta + B\zeta)\, B - (M - A\zeta + C\xi)\, A &= 0, \end{aligned}$$

die sich auch in der Proportionsform (41)

$$\frac{L - C\eta + B\zeta}{A} = \frac{M - A\zeta + C\xi}{B} = \frac{N - B\xi + A\eta}{C}$$

schreiben lassen. Hieraus folgt

$$\frac{K'^2}{AL + BM + CN} = \frac{AL + BM + CN}{A^2 + B^2 + C^2},$$

also:

$$K' = \pm \frac{AL + BM + CN}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Bedingungen eines Minimums für K'^2 erfüllt sind und dass K'^2 als positive quadratische Function kein Maximum und auch kein zweites Minimum haben kann; folglich ist der für K' gefundene Ausdruck wirklich das minimum minimorum.

Capitel IV.

Gleichgewicht eines Systems von Kräften, die an einem unveränderlichen Punktsystem angreifen. — Bestimmungsweisen eines solchen Kräftesystems.

66. Die Bedingungen, welche für das Gleichgewicht eines auf ein unveränderliches Punktsystem wirkenden Systems von Kräften $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... hinreichend und nothwendig sind, lassen sich durch die sechs Gleichungen (30) des vorigen Capitels ausdrücken. Man kann denselben die Form von linearen Gleichungen bezüglich der Grössen der Kräfte F, F', ... geben, mit Coefficienten, die nur von der Lage der Richtungslinien der Kräfte abhängen.

Bezeichnet man nämlich allgemein mit $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$ die Projectionen einer auf der Richtungslinie der Kraft $\overline{F^{(i)}}$ gelegenen, der Einheit gleichen Strecke und mit $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$, $\nu^{(i)}$ die Projectionen des Moments dieser Strecke auf die Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz, so kann man die sechs Grössen

$$a^{(i)}, \quad b^{(i)}, \quad c^{(i)}, \quad \lambda^{(i)}, \quad \mu^{(i)}, \quad \nu^{(i)} \tag{1}$$

als Stralencoordinaten der Richtungslinie der Kraft $\overline{F^{(i)}}$ betrachten. Die Producte

$$a^{(i)}F^{(i)}, \quad b^{(i)}F^{(i)}, \quad c^{(i)}F^{(i)}$$

sind dann die Projectionen des Vectors $VF^{(i)}$, während

$$\lambda^{(i)}F^{(i)}, \quad \mu^{(i)}F^{(i)}, \quad \nu^{(i)}F^{(i)}$$

die Projectionen des Moments $MF^{(i)}$ auf die Axen Ox, Oy, Oz sind, mit $+$ oder $-$ genommen, je nachdem die Kraft $F^{(i)}$ und die auf ihrer Richtungslinie gewählte, der Einheit

gleiche Strecke dem Sinne nach übereinstimmen oder nicht. Zur Vermeidung der Doppelsinnigkeit des Zeichens wollen wir annehmen, dass $F^{(i)}$ im ersteren Falle die Grösse der Kraft mit $+$ bezeichne, im zweiten aber mit $-$.

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die Gleichungen (30) auch schreiben:

$$\begin{array}{lll} \Sigma a F = 0, & \Sigma b F = 0, & \Sigma c F = 0, \\ \Sigma \lambda F = 0, & \Sigma \mu F = 0, & \Sigma \nu F = 0. \end{array} \tag{2}$$

Die Gerade, deren Coordinaten die Grössen (1) sind, d. h. die Richtungslinie der Kraft $F^{(i)}$, werden wir mit $(i+1)$ bezeichnen.

Ist die Anzahl n aller Kräfte kleiner als 6, so sind die Geraden (1), (2), ... (n) dadurch bedingt, dass ihre Stralencoordinaten von der Form (1) den $6 - n + 1$ Gleichungen genügen müssen, die man durch Elimination der Grössen aller Kräfte F, F', ... aus den Gleichungen (2) erhält, oder mit anderen Worten den Gleichungen, die sich dadurch ergeben, dass man die Determinanten n^{ten} Grades, die sich aus den Elementen der sechs Zeilen des Schemas

$$\left| \begin{array}{ll} a\, a'\, a'' & \ldots\, a^{(n-1)} \\ b\, b'\, b'' & \ldots\, b^{(n-1)} \\ c\, c'\, c'' & \ldots\, c^{(n-1)} \\ \lambda\, \lambda'\, \lambda'' & \ldots\, \lambda^{(n-1)} \\ \mu\, \mu'\, \mu'' & \ldots\, \mu^{(n-1)} \\ \nu\, \nu'\, \nu'' & \ldots\, \nu^{(n-1)} \end{array} \right| \tag{3}$$

bilden lassen, gleich Null setzt. Jede solche Gleichung ist linear und homogen bezüglich der Coordinaten $a^{(n-1)}$, $b^{(n-1)}$, ... der Geraden (n) mit Coefficienten, die von den Coordinaten der übrigen Geraden (1), (2), ... ($n - 1$) abhängig sind; sind also diese letzteren Geraden gegeben, so hat man zur Bestimmung der Coordinaten der unbekannten Geraden (n) immer $6 - n + 1$ lineare Gleichungen von ebensovielen Liniencomplexen, so dass die gesuchte Gerade (n) dadurch bedingt ist, dass sie der gemeinsame Stral dieser $6 - n + 1$ Liniencomplexe ist.

Die gegebenen Geraden (1), (2), ... ($n - 1$) sind gleichfalls gemeinsame Stralen derselben Complexe. Denn wenn man in die Gleichung irgend eines dieser Complexe für $a^{(n-1)}$,

$b^{(n-1)}$, ... die entsprechenden Coordinaten einer der gegebenen Geraden einsetzt, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung eine Determinante, in der zwei Colonnen entsprechend gleiche Elemente enthalten, die also identisch gleich Null ist.

Es folgt hieraus, dass *zum Gleichgewicht von Kräften, deren Anzahl n nicht grösser als 6 ist, nothwendig und hinreichend ist, dass die Richtungslinien der Kräfte gemeinsame Stralen von 6 — n + 1 linearen Complexen seien.*

Bestimmt man die dieser Bedingung genügenden Geraden und substituirt ihre Coordinaten von der Form (1) in die Gleichungen (2), so erhält man sechs lineare homogene Gleichungen mit F, F', ... als Unbekannten. Aus irgend welchen $n - 1$ dieser Gleichungen ergeben sich dann die Verhältnisse

$$\frac{F'}{F}, \frac{F''}{F}, \ldots \frac{F^{(n-1)}}{F}$$

aller Kräfte zu einer unter ihnen. Wählt man nun für die Kraft $\overline{F}$ eine beliebige Länge auf der Geraden (1) und lässt sie dem Sinne nach mit der Strecke $(a, b, c, \lambda, \mu, \nu)$ übereinstimmen, so ergiebt sich dann aus dem Verhältniss $\frac{F^{(i)}}{F}$ die Grösse einer beliebigen Kraft $F^{(i)}$ mit dem gehörigen Vorzeichen. Die Strecke, welche diese Kraft darstellt, hat man sich dann längs der Geraden $(i + 1)$ gerichtet zu denken, und zwar dem Sinne nach übereinstimmend mit der Strecke $(a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}, \lambda^{(i)}, \mu^{(i)}, \nu^{(i)})$, wenn $F^{(i)}$ positiv, und von entgegengesetztem Sinne, wenn $F^{(i)}$ negativ ist.

Ausser den $6 - n + 1$ Complexen, deren Gleichungen sich ergeben, wenn man die aus den Elementen der Zeilen von (3) gebildeten Determinanten n^{ten} Grades gleich Null setzt, giebt es im Falle $n < 6$ unendlich viele andere Complexe, die die Geraden (1), (2), ... (n) zu Stralen haben. Um die Gleichung eines solchen Complexes zu erhalten, braucht man nur die $n - 6 + 1$ aus den Zeilen von (3) gebildeten Determinanten n^{ten} Grades mit willkürlichen Factoren zu multipliciren und die Summe dieser Producte gleich Null zu setzen.

Man kann auch noch auf folgendem Wege nachweisen, dass alle Geraden (1), (2), ... (n) Stralen eines und desselben

Complexes sind. Da die Zahl der gegebenen Geraden (1), (2), ... $(n-1)$ nicht grösser als 5 ist und ein linearer Complex durch fünf Stralen bestimmt wird, so kann man jene Geraden, welches auch ihre Lage sein mag, als Stralen eines gewissen Complexes $[k, \omega]$ ansehen, was durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt ist:

$$\overline{k\overline{VF}} + \overline{\omega\overline{MF}} = 0,$$
$$\overline{k\overline{VF'}} + \overline{\omega\overline{MF'}} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{k\overline{VF^{(n-2)}}} + \overline{\omega\overline{MF^{(n-2)}}} = 0.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma\overline{VF} = 0$, $\Sigma\overline{MF} = 0$ ergeben aber

$$\overline{k\Sigma\overline{VF}} + \overline{\omega\Sigma\overline{MF}} = 0.$$

Subtrahirt man hiervon alle vorhergehenden Gleichungen, so bleibt die Gleichung

$$\overline{k\overline{VF^{(n-1)}}} + \overline{\omega\overline{MF^{(n-1)}}} = 0,$$

welche zeigt, dass auch die Gerade (n) ein Stral des Complexes $[k, \omega]$ ist. Ist $n < 5$, so lassen sich unendlich viele Complexe $[k, \omega]$ bilden, indem man zu den gegebenen Geraden (1), (2), ... $(n-1)$ eine oder mehr willkürliche Gerade hinzufügt, um die zur Bestimmung eines Complexes nothwendigen fünf Geraden zu erhalten.

67. Da die geometrische Summe $R = \Sigma\overline{F}$ gleich Null ist, so ist die Summe der Projectionen aller Kräfte auf jede Axe gleich Null. Wählt man als Projectionsaxe der Reihe nach die Geraden (1), (2), ... (n) und setzt man

$$\cos(rs) = a^{(r-1)}a^{(s-1)} + b^{(r-1)}b^{(s-1)} + c^{(r-1)}c^{(s-1)},$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} F + F'\cos(21) + F''\cos(31) + \cdots + F^{(n-1)}\cos(n1) = 0, \\ F\cos(12) + F' + F''\cos(32) + \cdots + F^{(n-1)}\cos(n2) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F\cos(1n) + F'\cos(2n) + F''\cos(3n) + \cdots + F^{(n-1)} = 0. \end{array}\right\} (4)$$

Eliminirt man hieraus die Grössen $F, F', \ldots F^{(n-1)}$, so erhält man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos(21), & \cos(31), \ldots & \cos(n1) \\ \cos(12), & 1, & \cos(32), \ldots & \cos(n2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos(1n), & \cos(2n), & \cos(3n), \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad (5)$$

die Determinante links ist nach der Multiplicationsregel für Determinanten aus den Elementen der Colonnen zweier identischer, aus den drei ersten Zeilen des Schemas (3) gebildeten Schemata gebildet, was sich folgendermassen symbolisch ausdrücken lässt:

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2, & aa'+bb'+cc', \ldots \\ a'a+b'b+c'c, & a'^2+b'^2+c'^2, \ldots \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a a' a'' \ldots a^{(n-1)} \\ b b' b'' \ldots b^{(n-1)} \\ c c' c'' \ldots c^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a a' a'' \ldots a^{(n-1)} \\ b b' b'' \ldots b^{(n-1)} \\ c c' c'' \ldots c^{(n-1)} \end{vmatrix}. (6)$$

Ein solches Product wird identisch gleich Null, wenn $n > 3$ ist; daher bedingt die Gleichung (5) die Winkel zwischen den Kräften nur in dem Falle, wenn $n \leqq 3$ ist. Die obige Determinante ist symmetrisch; bezeichnet man sie also mit D und ihre Derivirte nach dem Elemente der r^{ten} Zeile und der s^{ten} Colonne mit D_{rs}, so hat man

$$D_{rs}^2 = D_{rr} D_{ss}.$$

Im Falle $n - 1 > 3$ sind die Hauptunterdeterminanten D_{rr}, also auch alle D_{rs} gleich Null. Ist dagegen $n - 1 \leqq 3$, d. h. $n \leqq 4$, so sind die D_{rr} im Allgemeinen nicht gleich Null, und die Gleichungen (4) führen auf die Proportionen:

$$F : F' : F'' : \ldots F^{(n-1)} = D_{r1} : D_{r2} : D_{r3} : \ldots D_{rn}. \quad (7)$$

Wegen $D_{rs}^2 = D_{rr} D_{ss}$ haben alle Hauptunterdeterminanten D_{11}, D_{22}, … D_{nn} dasselbe Vorzeichen. Da aber die Determinante D_{11} nach Formel (6) ausdrückbar ist, so ist sie ein Quadrat oder eine Summe von Quadraten, kann also nicht negativ sein; sind daher die Determinanten D_{11}, D_{22}, … D_{nn} nicht gleich Null, so sind sie sämmtlich positiv. Mit Hilfe der Gleichung $D_{rs}^2 = D_{rr} D_{ss}$ kann man die Proportionen (7) auch durch die folgenden ersetzen:

$$\sqrt{F} : \sqrt{F'} : \sqrt{F''} : \ldots \sqrt{F^{(n-1)}} = \sqrt{D_{11}} : \sqrt{D_{22}} : \sqrt{D_{33}} : \ldots \sqrt{D_{nn}}. \quad (8)$$

Es lässt sich aber auch noch ein anderes System von Proportionen zur Bestimmung der Verhältnisse der Kräfte auf-

stellen. Wählt man nämlich in Gleichung (35), S. 286, für $\bar{\sigma}$ der Einheit gleiche Strecken auf den Geraden (1), (2), ... (n) und bezeichnet mit $\binom{r}{s}$ das relative Moment der auf den Geraden (r) und (s) gelegenen Strecken, so erhält man die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 + \binom{2}{1} F' + \binom{3}{1} F'' + \cdots \binom{n}{1} F^{(n-1)} &= 0, \\
\binom{1}{2} F + 0 + \binom{3}{2} F'' + \cdots \binom{n}{2} F^{(n-1)} &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\binom{1}{n} F + \binom{2}{n} F' + \binom{3}{n} F'' + \cdots 0 &= 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Eliminirt man hieraus die Grössen der Kräfte, so ergiebt sich die Gleichung

$$
\begin{vmatrix}
0, & \binom{2}{1}, & \binom{3}{1}, & \cdots & \binom{n}{1} \\
\binom{1}{2}, & 0, & \binom{3}{2}, & \cdots & \binom{n}{2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\binom{1}{n}, & \binom{2}{n}, & \binom{3}{n}, & \cdots & 0
\end{vmatrix} = 0, \tag{10}
$$

worin die Determinante links, die wir mit $\varDelta$ bezeichnen, aus Elementen von der Form

$$
\binom{r}{s} = a^{(r-1)} \lambda^{(s-1)} + b^{(r-1)} \mu^{(s-1)} + c^{(r-1)} \nu^{(s-1)} + \lambda^{(r-1)} a^{(s-1)} + \mu^{(r-1)} b^{(s-1)} + \nu^{(r-1)} c^{(s-1)}
$$

zusammengesetzt ist.*) Die Determinante $\varDelta$ geht nach der

---

*) Nach Formel (14), S. 274, ist nämlich

$$
F^{(r-1)} F^{(s-1)} \binom{F^{(r-1)}}{F^{(s-1)}} = \overline{V F^{(r-1)} . M F^{(s-1)}} + \overline{M F^{(r-1)} . V F^{(s-1)}},
$$

oder

$$
\pm F^{(r-1)} F^{(s-1)} \binom{r}{s} = \pm \left[a^{(r-1)} \lambda^{(s-1)} + b^{(r-1)} \mu^{(s-1)} + c^{(r-1)} \nu^{(s-1)} + \lambda^{(r-1)} a^{(s-1)} + \mu^{(r-1)} b^{(s-1)} + \nu^{(r-1)} c^{(s-1)} \right] F^{(r-1)} F^{(s-1)};
$$

dividirt man dies durch $\pm F^{(r-1)} F^{(s-1)}$, so ergiebt sich der obige Ausdruck für $\binom{r}{s}$.

Multiplicationsregel für Determinanten aus den Elementen der beiden Schemata

$$\begin{vmatrix} a\, a'\, a'' & \dots & a^{(n-1)} \\ b\, b'\, b'' & \dots & b^{(n-1)} \\ c\, c'\, c'' & \dots & c^{(n-1)} \\ \lambda\, \lambda'\, \lambda'' & \dots & \lambda^{(n-1)} \\ \mu\, \mu'\, \mu'' & \dots & \mu^{(n-1)} \\ \nu\, \nu'\, \nu'' & \dots & \nu^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \lambda\, \lambda'\, \lambda'' & \dots & \lambda^{(n-1)} \\ \mu\, \mu'\, \mu'' & \dots & \mu^{(n-1)} \\ \nu\, \nu'\, \nu'' & \dots & \nu^{(n-1)} \\ a\, a'\, a'' & \dots & a^{(n-1)} \\ b\, b'\, b'' & \dots & b^{(n-1)} \\ c\, c'\, c'' & \dots & c^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

hervor, wenn man colonnenweise multiplicirt.

Ist $n > 6$, so ist die Determinante $\varDelta$ identisch gleich Null, und folglich giebt die Gleichung (10) dann keine Bedingung für die relativen Momente $\binom{r}{s}$. Ist dagegen $n \leq 6$, so ist $\varDelta$ die Summe der Producte, die man dadurch erhält, dass man alle Determinanten n^{ten} Grades, die sich aus den Zeilen des ersten Schemas bilden lassen, mit den aus den entsprechenden Zeilen des zweiten Schemas gebildeten Determinanten desselben Grades multiplicirt. Nun verlangen aber die Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte, wie wir in § 66 gesehen haben, dass alle diese Determinanten n^{ten} Grades verschwinden; folglich ist die Gleichung $\varDelta = 0$ nur eine Folge der in § 66 aufgestellten Bedingungen, denen die Geraden (1), (2), ... (n) genügen müssen.

Da die Determinante $\varDelta$ symmetrisch ist, so hat man, wenn $\varDelta_{rs}$ die Derivirte von $\varDelta$ nach dem Elemente der r^{ten} Zeile und der s^{ten} Colonne bezeichnet, $\varDelta_{rs} = \varDelta_{sr}$ und $\varDelta_{rs}^2 = \varDelta_{rr}\varDelta_{ss}$.

Ist $n - 1 > 6$, so sind alle $\varDelta_{rr}$ und $\varDelta_{rs}$ identisch gleich Null. Ist aber $n - 1 \leq 6$, so sind im Allgemeinen nicht alle $\varDelta_{rs}$ gleich Null, so dass die Gleichungen (7) durch die folgenden Proportionen

$$F : F' : F'' : \dots F^{(n-1)} = \varDelta_{r1} : \varDelta_{r2} : \varDelta_{r3} : \dots \varDelta_{rn}$$

oder

$$\sqrt{F} : \sqrt{F'} : \dots \sqrt{F^{(n-1)}} = \sqrt{\varDelta_{11}} : \sqrt{\varDelta_{22}} : \dots \sqrt{\varDelta_{nn}} \qquad (11)$$

ersetzt werden können.

Durch Anwendung der Gleichung (35) ergiebt sich noch die folgende bemerkenswerthe Eigenschaft der Geraden (1), (2), ... (n):

Wenn n Kräfte im Gleichgewicht sind, so schneidet jede Gerade, welche die Richtungslinien von $n - 1$ Kräften schneidet, auch die Richtungslinie der noch übrigen n^{ten} Kraft.

Schneidet nämlich eine Gerade $\overline{\sigma}$ die Richtungslinien (1), (2), ... $(n - 1)$, so hat man:

$$\binom{F}{\sigma} = 0, \binom{F'}{\sigma} = 0, \ldots \binom{F^{(n-2)}}{\sigma} = 0;$$

hiermit geht aber (35) in die eingliedrige Gleichung

$$F^{(n-1)} \binom{F^{(n-1)}}{\sigma} = 0$$

über, welche aussagt, dass das relative Moment $\binom{F^{(n-1)}}{\sigma}$ gleich Null ist, was erfordert, dass $\overline{\sigma}$ die Gerade (n) in endlicher oder unendlicher Entfernung schneide.

68. Wir werden jetzt der Reihe nach alle Fälle des Gleichgewichts der Kräfte für $n < 6$ untersuchen.

1) $n = 2$. *Es sind zwei Kräfte $\overline{F}$ und $\overline{F'}$ so zu bestimmen, dass sie im Gleichgewicht sind und dass die Kraft $\overline{F}$ in die Richtung einer gegebenen Geraden (1) fällt.*

Infolge der Bedingung, dass der Hauptvector $R = \Sigma \overline{VF}$ und das Hauptmoment $K = \Sigma \overline{MF}$ gleich Null sein müssen, hat man

$$\overline{VF} + \overline{VF'} = 0, \ \overline{MF} + \overline{MF'} = 0,$$

woraus folgt:

$$\overline{VF'} = - \overline{VF}, \ \overline{MF'} = - \overline{MF};$$

hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass die Kräfte $\overline{F}$ und $\overline{F'}$ gleich, längs derselben Geraden (1) gerichtet und von entgegengesetztem Sinne sind; die Angriffspunkte der Kräfte bleiben dabei willkürlich.

Dass beide Kräfte längs der Geraden (1) gerichtet sein müssen oder dass die Gerade (2) mit (1) zusammenfallen muss, ergiebt sich auch schon daraus, dass jede, die gegebene (1) schneidende Gerade $\overline{\sigma}$ auch (2) schneiden muss. Die hier gefundene Bedingung des Gleichgewichts zweier an einem vollkommen starren Körper angreifender Kräfte nimmt man gewöhnlich als ein Grundaxiom der Statik des starren Körpers an.

Aus den Zeilen des Schemas (3) lassen sich fünf unabhängige Determinanten zweiten Grades bilden; indem man dieselben gleich Null setzt, erhält man die zwischen den Coordinaten der Geraden (1) und (2) bestehenden Gleichungen, nämlich:

$$\begin{vmatrix} a\,a' \\ b\,b' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a\,a' \\ c\,c' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a\,a' \\ \lambda\,\lambda' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a\,a' \\ \mu\,\mu' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a\,a' \\ \nu\,\nu' \end{vmatrix} = 0.^{*)}$$

Diese Gleichungen drücken aber offenbar das Zusammenfallen der Geraden (1) und (2) aus.

2) $n = 3$. *Es sind drei Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$ so zu bestimmen, dass sie im Gleichgewichte sind und dass zwei von ihnen längs zwei gegebenen Geraden (1) und (2) gerichtet sind.*

Jede die Geraden (1) und (2) schneidende Gerade $\overline{\sigma}$ muss auch (3) schneiden; dies erfordert, dass alle drei Geraden in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte in endlicher oder unendlicher Entfernung treffen; die Lösung der Aufgabe ist daher nur möglich, wenn die Geraden (1) und (2) in derselben Ebene gegeben sind.

Unter dieser Voraussetzung kann man für (3) jede in der Ebene der gegebenen Geraden (1) und (2) gelegene, durch ihren Schnittpunkt hindurchgehende und nicht mit einer von ihnen zusammenfallende Gerade wählen.

Liegt der Schnittpunkt O im Endlichen, so lässt sich die Grösse der Kräfte folgendermassen bestimmen.

Man nehme auf (1) eine beliebige Strecke $\overline{F}$ und eine ihr entgegengesetzt gleiche OA an; die letztere zerlege man in zwei Componenten OB und OC längs den Geraden (2) und (3); hierauf trage man auf (2) von einem beliebigen Punkte aus eine Strecke $\overline{F'}$ geometrisch gleich OB auf und auf (3) von einem beliebigen Punkte aus eine Strecke $\overline{F''}$ geometrisch gleich OC. Die drei Strecken $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$ repräsentiren dann drei Kräfte, die allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Liegt dagegen der Schnittpunkt der Geraden (1) und (2) im Unendlichen, d. h. sind dieselben parallel, so kann man

---

*) Es wird hier vorausgesetzt, dass die beiden Grössen a und a' nicht gleich Null sind.

für (3) eine beliebige, jenen parallele und in derselben Ebene liegende Gerade wählen. Nimmt man auf (1) eine willkürliche Kraft $\overline{F}$ an, so lassen sich die beiden anderen mit Hilfe der Bedingungen $\Sigma \overline{VF} = 0$, $\Sigma \overline{MF} = 0$ bestimmen. Es sei ein beliebiger Punkt A der Geraden (1) der Ursprung der Momente; dann hat man $MF = 0$, also $\overline{MF'} + \overline{MF''} = 0$ oder $\overline{MF''} = -\overline{MF'}$, d. h. die Momente der beiden gesuchten Kräfte müssen einander entgegengesetzt gleich sein. Dazu ist aber erforderlich, dass die Kräfte $\overline{F'}$ und $\overline{F''}$, die längs (2) und (3) wirken, dem Sinne nach übereinstimmen, wenn (1) zwischen (2) und (3) liegt, und von entgegengesetztem Sinne sind, wenn (2) und (3) auf derselben Seite von (1) liegen. Ausserdem müssen in beiden Fällen die Grössen der Kräfte $\overline{F'}$ und $\overline{F''}$ ihren Armen, d. h. den Abständen der Geraden (1) von (2) und (3) umgekehrt proportional sein. Endlich verlangt noch die Bedingung $\Sigma \overline{VF} = 0$, dass im ersten Falle $F = F' + F''$, im zweiten aber $F = F' - F''$ oder $F = F'' - F'$ sei, je nachdem (2) oder (3) der Geraden (1) näher liegt.

Die Gleichung (5) wird

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos(12), & \cos(13) \\ \cos(21), & 1, & \cos(23) \\ \cos(31), & \cos(32), & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und drückt aus, dass die Vectoren VF, VF', VF'' der drei Kräfte in derselben Ebene liegen müssen. Man sieht leicht, dass

$$D_{11} = \sin^2(23), \ D_{22} = \sin^2(31), \ D_{33} = \sin^2(12)$$

ist, so dass die Proportionen (8) übergehen in:

$$VF : VF' : VF'' = \sin(23) : \sin(31) : \sin(12).$$

Wenn die Geraden (1), (2), (3) parallel sind, so nehmen die Proportionen (8) eine unbestimmte Form an, da $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$, $D_{33} = 0$ wird. Dann geben die Gleichungen (4)

$$F + F' + F'' = 0,$$

wobei F, F', F'' positiv oder negativ sein können.

Die Gleichung (10) wird

$$2 \binom{1}{2} \binom{1}{3} \binom{2}{3} = 0,$$

und verlangt, dass eines der relativen Momente

$$\binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \binom{2}{3}$$

gleich Null sei; die Gleichung (11) zeigt aber, dass, wenn eines dieser Momente gleich Null ist, alle verschwinden, d. h. dass alle drei Geraden (1), (2), (3) in derselben Ebene liegen müssen.

Indem man die aus den Zeilen des Schemas (3) zu bildenden Determinanten dritten Grades gleich Null setzt, erhält man die folgenden vier Gleichungen, die zwischen den Coordinaten der Geraden (1), (2), (3) bestehen:

$$\begin{vmatrix} a\,a'\,a'' \\ b\,b'\,b'' \\ c\,c'\,c'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda\,\lambda'\,\lambda'' \\ b\,b'\,b'' \\ c\,c'\,c'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a\,a'\,a'' \\ \mu\,\mu'\,\mu'' \\ c\,c'\,c'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a\,a'\,a'' \\ b\,b'\,b'' \\ \nu\,\nu'\,\nu'' \end{vmatrix} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die erste dieser Gleichungen die Bedingung ausdrückt, dass (1), (2), (3) in einer Ebene liegen, während die übrigen aussagen, dass diese Geraden sich in einem Punkte schneiden.

3) $n = 4$. *Es sind vier Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$ so zu bestimmen, dass sie im Gleichgewicht sind und dass die drei ersten längs drei gegebenen Geraden (1), (2), (3) gerichtet sind.*

Jede die Geraden (1), (2), (3) schneidende Gerade (A) muss auch (4) schneiden; daher muss (4) mit allen ihren Punkten auf dem geradlinigen Hyperboloid liegen, welches die Gerade (A) bei ihrer Bewegung längs (1), (2), (3) als Leitlinien erzeugt. Folglich repräsentiren (1), (2), (3), (4) vier Lagen einer Erzeugenden der zweiten Schaar jenes Hyperboloids.*)

Hat man hiernach die Gerade (4) construirt, so bleiben noch die Grössen der Kräfte zu bestimmen. Zu diesem Zwecke zieht man durch einen beliebigen Punkt O vier Gerade (1′), (2′), (3′), (4′) resp. parallel den Geraden (1), (2), (3), (4) und trägt auf (1′) eine beliebige Strecke OA auf, die wir als Vector der Kraft $\overline{F}$ wählen; dann zerlegt man die ihr ent-

*) Diese Eigenschaft der Richtungslinien von vier im Gleichgewichte befindlichen Kräften ist von Möbius gefunden worden, s. „Lehrbuch der Statik", 1. Th., § 99 (S. 177—178).

gegengesetzt gleiche Strecke OB in drei Componenten OA', OA'', OA''' längs den Geraden (2'), (3'), (4'). Die vier Strecken OA, OA', OA'', OA''' sind die Vectoren der gesuchten Kräfte; trägt man also auf (1), (2), (3), (4) ihnen geometrisch gleiche Strecken auf, so stellen diese die Kräfte selbst dar.

Die Verhältnisse der Vectoren ergeben sich aus den Proportionen (8)

$$VF : VF' : VF'' : VF''' = \sqrt{D_{11}} : \sqrt{D_{22}} : \sqrt{D_{33}} : \sqrt{D_{44}},$$

oder aus den Proportionen (11)

$$VF : VF' : VF'' : VF''' = \sqrt{\varDelta_{11}} : \sqrt{\varDelta_{22}} : \sqrt{\varDelta_{33}} : \sqrt{\varDelta_{44}},$$

worin

$$\varDelta_{11} = 2\binom{2}{3}\binom{2}{4}\binom{3}{4},$$

$$\varDelta_{22} = 2\binom{1}{3}\binom{1}{4}\binom{3}{4},$$

$$\varDelta_{33} = 2\binom{1}{2}\binom{1}{4}\binom{2}{4},$$

$$\varDelta_{44} = 2\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{2}{3}$$

ist. Die letzten Proportionen lassen sich unter der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} VF : VF' &= \sqrt{\left[\binom{2}{3}\binom{2}{4}\right] : \left[\binom{1}{3}\binom{1}{4}\right]}, \\ VF' : VF'' &= \sqrt{\left[\binom{1}{3}\binom{3}{4}\right] : \left[\binom{1}{2}\binom{2}{4}\right]}, \\ VF'' : VF''' &= \sqrt{\left[\binom{1}{4}\binom{2}{4}\right] : \left[\binom{1}{3}\binom{2}{3}\right]}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Die Determinante $\varDelta$ in Gleichung (10) wird

$$\begin{aligned} \varDelta = {} & \binom{1}{2}^2\binom{3}{4}^2 + \binom{1}{3}^2\binom{2}{4}^2 + \binom{2}{3}^2\binom{1}{4}^2 \\ & - 2\binom{1}{2}\binom{1}{3}\binom{2}{4}\binom{3}{4} - 2\binom{1}{2}\binom{1}{4}\binom{2}{3}\binom{3}{4} - 2\binom{1}{3}\binom{1}{4}\binom{2}{3}\binom{2}{4}, \end{aligned}$$

was sich auch schreiben lässt:

$$\varDelta = \left[\binom{1}{2}\binom{3}{4} - \binom{1}{3}\binom{2}{4} - \binom{2}{3}\binom{1}{4}\right]^2 - 4\binom{1}{3}\binom{1}{4}\binom{2}{3}\binom{2}{4}.$$

Aus der Gleichung $\varDelta = 0$ folgt, dass das Product

$$\binom{1}{3}\binom{1}{4}\binom{2}{3}\binom{2}{4}$$

nicht negativ sein kann, weshalb $\binom{1}{3}\binom{1}{4}$ und $\binom{2}{3}\binom{2}{4}$ dasselbe Vorzeichen haben müssen; daher kann der unter dem Wurzelzeichen in der ersten der Gleichungen (12) stehende Ausdruck nicht negativ sein. Dasselbe gilt auch von den beiden anderen Wurzelgrössen in (12).

Der vorstehende Ausdruck für Δ lässt sich in die folgenden vier Factoren zerlegen:

$$\left[\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}+\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}+\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}\right],$$

$$\left[\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}-\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}-\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}\right],$$

$$\left[\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}+\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}-\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}\right],$$

$$\left[\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}-\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}+\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}\right];$$

die Gleichung $\Delta = 0$ fordert nun, dass mindestens einer dieser Factoren gleich Null sei. Der erste kann als eine Summe positiver Grössen nicht gleich Null sein, wenn die relativen Momente der Geraden (1), (2), (3), (4) nicht gleich Null sind; man muss daher einen der drei anderen Factoren gleich Null setzen, z. B.:

$$\sqrt{\binom{1}{2}\binom{3}{4}}-\sqrt{\binom{1}{3}\binom{2}{4}}-\sqrt{\binom{2}{3}\binom{1}{4}}=0. \tag{13}$$

Dies ist die Bedingung, die zwischen den relativen Momenten von vier Geraden (1), (2), (3), (4) besteht, welche Erzeugende derselben Schaar von einem beliebigen geradlinigen Hyperboloid (H) sind.

Es seien (A) und (B) zwei Erzeugende der anderen Schaar des Hyperboloids (H). Sind α_1, α_2, α_3, α_4 die Schnittpunkte der Geraden (A) mit den Geraden (1), (2), (3), (4) und β_1, β_2, β_3, β_4 die der Geraden (B) mit denselben Geraden, ist ferner $\binom{A}{B}$ das relative Moment der Geraden (A) und (B), so hat man:

$$\pm\,\alpha_1\beta_1\,.\,\alpha_2\beta_2\binom{1}{2}=\alpha_1\alpha_2\,.\,\beta_1\beta_2\binom{A}{B},$$

$$\pm\,\alpha_1\beta_1\,.\,\alpha_3\beta_3\binom{1}{3}=\alpha_1\alpha_3\,.\,\beta_1\beta_3\binom{A}{B},$$

$$\pm\, \alpha_1\beta_1 \,.\, \alpha_4\beta_4 \binom{1}{4} = \alpha_1\alpha_4 \,.\, \beta_1\beta_4 \binom{A}{B},$$
$$\pm\, \alpha_2\beta_2 \,.\, \alpha_3\beta_3 \binom{2}{3} = \alpha_2\alpha_3 \,.\, \beta_2\beta_3 \binom{A}{B},$$
$$\pm\, \alpha_2\beta_2 \,.\, \alpha_4\beta_4 \binom{2}{4} = \alpha_2\alpha_4 \,.\, \beta_2\beta_4 \binom{A}{B},$$
$$\pm\, \alpha_3\beta_3 \,.\, \alpha_4\beta_4 \binom{3}{4} = \alpha_3\alpha_4 \,.\, \beta_3\beta_4 \binom{A}{B}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man die relativen Momente $\binom{1}{2}$, $\binom{1}{3}$, $\binom{1}{4}$, $\binom{2}{3}$, $\binom{2}{4}$, $\binom{3}{4}$ aus den Proportionen (12) eliminiren; dadurch erhält man die Verhältnisse der Kräfte ausgedrückt als Functionen der Abschnitte auf den Geraden (1), (2), (3), (4), (A) und (B).

Das erste der Verhältnisse (12) geht über in

$$VF : VF' = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2}\left[\frac{\alpha_2\alpha_3 \,.\, \alpha_2\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3 \,.\, \alpha_1\alpha_4} \cdot \frac{\beta_2\beta_3 \,.\, \beta_2\beta_4}{\beta_1\beta_3 \,.\, \beta_1\beta_4}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Zwischen den Abschnitten, welche zwei Transversalen auf vier Erzeugenden derselben Schaar eines geradlinigen Hyperboloids bilden, besteht aber bekanntlich die Relation

$$\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1\beta_3} : \frac{\beta_2\beta_4}{\beta_1\beta_4} = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_3} : \frac{\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1\alpha_4}, \tag{14}$$

womit sich ergiebt:

$$\frac{VF}{VF'} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2} \cdot \frac{\alpha_2\alpha_3 \,.\, \alpha_2\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3 \,.\, \alpha_1\alpha_4}$$
$$= \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2} \cdot \frac{\beta_2\beta_3 \,.\, \beta_2\beta_4}{\beta_1\beta_3 \,.\, \beta_1\beta_4}.$$

Die Proportion (14) folgt, wie **Möbius** gezeigt hat, aus der Gleichung $\varDelta = 0$.*)

Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\alpha_1\alpha_2 \,.\, \alpha_3\alpha_4 = A_1,\; \alpha_1\alpha_3 \,.\, \alpha_2\alpha_4 = A_2,\; \alpha_2\alpha_3 \,.\, \alpha_1\alpha_4 = A_3,$$
$$\beta_1\beta_2 \,.\, \beta_3\beta_4 = B_1,\; \beta_1\beta_3 \,.\, \beta_2\beta_4 = B_2,\; \beta_2\beta_3 \,.\, \beta_1\beta_4 = B_3,$$

so schreibt sich die Gleichung $\varDelta = 0$ folgendermassen:

$$(A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3)^2 - 4\,A_2B_2A_3B_3 = 0; \tag{15}$$

da nun aber

$$\alpha_3\alpha_4 = \pm\,\alpha_1\alpha_4 \pm \alpha_1\alpha_3,$$
$$\beta_3\beta_4 = \pm\,\beta_1\beta_4 \pm \beta_1\beta_3$$

*) „Lehrbuch der Statik“, 1. Th. § 102 (S. 186).

ist, so wird

$$A_1 = \pm A_2 \pm A_3\,,$$
$$B_1 = \pm B_2 \pm B_3\,,$$

wobei die Vorzeichen in den entsprechenden Gliedern dieselben sein müssen. Hiermit geht Gleichung (15) über in

$$(A_2 B_3 + B_2 A_3)^2 - 4 A_2 B_2 A_3 B_3 = 0$$

oder

$$(A_2 B_3 - B_2 A_3)^2 = 0\,;$$

hieraus folgt

$$A_2 B_3 = B_2 A_3\,,$$

oder

$$\frac{B_2}{B_3} = \frac{A_2}{A_3}\,,$$

was mit der Proportion (14) übereinstimmt.

Untersuchen wir nun die Resultate, die sich durch Elimination der Grössen der Kräfte aus den 6 Gleichgewichtsbedingungen (2), S. 295, ergeben. Man erhält dieselben, wie oben gezeigt wurde, wenn man die aus den Zeilen des Schemas (3) gebildeten Determinanten 4. Grades gleich Null setzt. Es ergeben sich hier drei von einander unabhängige Gleichungen, die man in folgender Form schreiben kann:

$$\begin{vmatrix} a\, a'\, a''\, a''' \\ b\, b'\, b''\, b''' \\ c\, c'\, c''\, c''' \\ \lambda\, \lambda'\, \lambda''\, \lambda''' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a\, a'\, a''\, a''' \\ b\, b'\, b''\, b''' \\ c\, c'\, c''\, c''' \\ \mu\, \mu'\, \mu''\, \mu''' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a\, a'\, a''\, a''' \\ b\, b'\, b''\, b''' \\ c\, c'\, c''\, c''' \\ \nu\, \nu'\, \nu''\, \nu''' \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselben lassen sich in Form von linearen Gleichungen bezüglich der Coordinaten a''', b''', c''', λ''', μ''', ν''' der gesuchten Geraden (4) darstellen, nämlich:

$$\begin{aligned} A a''' + B b''' + C c''' + L \lambda''' &= 0, \\ A' a''' + B' b''' + C' c''' + M \mu''' &= 0, \\ A'' a''' + B'' b''' + C'' c''' + N \nu''' &= 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Für variable a''', b''', $\ldots \nu'''$ stellt jede dieser Gleichungen einen Liniencomplex dar; die Gerade (4) ist daher ein gemeinsamer Stral dieser drei Complexe.

Alle gemeinsamen Stralen der drei Complexe sind Erzeugende des Hyperboloids (H). Zu den Erzeugenden der-

selben Schaar gehören auch die gegebenen Geraden (1), (2), (3), da ihre Coordinaten den Gleichungen (16) genügen. Man kann sie als Leitlinien zur Construction des Hyperboloids (H) wählen.

Bezeichnen x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Geraden (4), so hat man:

$$\lambda''' = c'''y - b'''z,\ \mu''' = a'''z - c'''x,\ \nu''' = b'''x - a'''y. \quad (17)$$

Substituirt man diese Grössen für λ''', μ''', ν''' in die Gleichungen (16), so folgt:

$$\begin{aligned} Aa''' + (B - Lz)b''' + (C + Ly)c''' &= 0, \\ (A' + Mz)a''' + B'b''' + (C' - Mx)c''' &= 0, \quad (18) \\ (A'' - Ny)a''' + (B'' + Nx)b''' + C''c''' &= 0; \end{aligned}$$

hieraus ergiebt sich durch Elimination von a''', b''', c''' als Gleichung des Hyperboloids (H):

$$\begin{vmatrix} A, & B - Lz, & C + Ly \\ A' + Mz, & B', & C' - Mx \\ A'' - Ny, & B'' + Nx, & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (16) in Verbindung mit der zwischen den Coordinaten der Geraden (4) bestehenden Gleichung

$$a'''\lambda''' + b'''\mu''' + c'''\nu''' = 0$$

die Grössen λ''', μ''', ν''', so ergiebt sich eine Gleichung, die nur a''', b''', c''' als Unbekannte enthält, nämlich:

$$\begin{aligned} &\frac{A}{L}a'''^2 + \frac{B'}{M}b'''^2 + \frac{C''}{N}c'''^2 \\ &+ \left(\frac{C'}{M} + \frac{B''}{N}\right)b'''c''' + \left(\frac{C}{L} + \frac{A''}{N}\right)c'''a''' + \left(\frac{B}{L} + \frac{A'}{M}\right)a'''b''' = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

es ist dies die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung, dessen Spitze der Ursprung O und dessen Erzeugende derjenigen Schaar von Erzeugenden des Hyperboloids (H) parallel sind, zu der die Geraden (1), (2), (3) gehören.

Bestimmt man nun drei reelle Grössen a''', b''', c''', die der Gleichung (19) genügen, setzt sie in die Gleichungen (16) ein und entwickelt die entsprechenden Werthe von λ''', μ''', ν''', so hat man hiermit alle sechs Coordinaten der gesuchten Geraden (4). Substituirt man diese Coordinaten in die Gleichungen (17), so erhält man hiermit die Gleichungen der Ge-

raden (4). Man kann dann die Verhältnisse der Kräfte zu einander und ihre Vorzeichen aus den drei Gleichungen

$$aF + a'F' + a''F'' + a'''F''' = 0,$$
$$bF + b'F' + b''F'' + b'''F''' = 0,$$
$$cF + c'F' + c''F'' + c'''F''' = 0$$

finden, aus welchen folgt:

$$F : F' : F'' : F''' = \begin{vmatrix} a' a'' a''' \\ b' b'' b''' \\ c' c'' c''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a a'' a''' \\ b b'' b''' \\ c c'' c''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a a' a''' \\ b b' b''' \\ c c' c''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a a' a'' \\ b b' b'' \\ c c' c'' \end{vmatrix}.$$

Die Vorzeichen der Determinanten bestimmen die Vorzeichen der Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \overline{F'''}$. Jene Determinanten sind resp. gleich

$$\pm\sqrt{D_{11}},\ \pm\sqrt{D_{22}},\ \pm\sqrt{D_{33}},\ \pm\sqrt{D_{44}},$$

womit die letzten Proportionen in die Proportionen (8) übergehen.

Beachtung verdienen einige Specialfälle der Bestimmung von vier im Gleichgewicht befindlichen Kräften.

a) Zwei der gegebenen Geraden, (1) und (2), liegen in einer Ebene, die aber die dritte, (3), nicht enthält. Da jede durch den Schnittpunkt von (1) und (2) gehende und die (3) schneidende Gerade auch (4) schneiden muss, so muss diese letztere in der durch (3) und den Schnittpunkt von (1) und (2) gehenden Ebene liegen.

b) Die drei gegebenen Geraden (1), (2), (3) liegen sämmtlich in einer Ebene. Da jede in dieser Ebene gezogene Gerade auch (4) schneiden muss, so liegt letztere in der Ebene der Geraden (1), (2), (3).

In diesen beiden Fällen lassen sich die Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \overline{F'''}$ folgendermassen bestimmen.

Man legt eine Gerade (A) durch den Schnittpunkt von (1) und (2) und durch den von (3) und (4);*) hierauf bestimmt man drei im Gleichgewichte befindliche Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, P$, deren Richtungslinien (1), (2), (A) sind; ebenso drei Kräfte $\overline{F''}, \overline{F'''}, \overline{P'}$, die im Gleichgewichte sind und längs (3), (4),

*) Dabei sind die Fälle, wo einer dieser Punkte oder beide ins Unendliche fallen, nicht ausgeschlossen.

(*A*) wirken, wobei man die Kraft $\overline{P'}$ der Kraft $\overline{P}$ entgegengesetzt gleich wählt. Da sich die Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{P'}$ aufheben, so müssen die vier Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$ im Gleichgewicht sein; dieselben erfüllen aber auch die Bedingung, dass die drei ersten von ihnen längs (1), (2), (3) gerichtet sind.

4) $n = 5$. *Es sind fünf Kräfte* $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$, $\overline{F^{IV}}$ *so zu bestimmen, dass sie sich im Gleichgewicht befinden und dass die vier ersten längs den Geraden (1), (2), (3), (4) gerichtet sind.*

Nehmen wir zunächst an, dass die gegebenen Geraden zwei reelle Transversalen (*A*) und (*A'*) haben. Wie früher bewiesen, muss jede der beiden Geraden (*A*) und (*A'*) die Gerade (5) schneiden; man kann daher für (5) jede Transversale von (*A*) und (*A'*) wählen.

Um die Geraden (*A*) und (*A'*) zu finden, muss man die Schnittpunkte der Geraden (4) mit dem geradlinigen Hyperboloide (*H*) bestimmen, das durch die Bewegung einer Geraden längs den drei Leitlinien (1), (2), (3) entsteht, und durch diese Schnittpunkte zwei Erzeugende des Hyperboloids, d. h. zwei Gerade ziehen, welche die Geraden (1), (2), (3) schneiden.

Es kann vorkommen, dass die beiden Schnittpunkte der Geraden (4) mit (*H*) in einen einzigen zusammenfallen; dann fallen auch (*A*) und (*A'*) in eine Gerade und ihre Schnittpunkte mit (5) in einen Punkt; daher wird (5) zu einer Tangente des Hyperboloids (*H*). In diesem Falle hat man für (5) eine beliebige Gerade zu wählen, die das Hyperboloid (*H*) in einem der Punkte der die Geraden (1), (2), (3), (4) schneidenden Doppelgeraden (*A*) berührt.

Denken wir uns nun ferner ein geradliniges Hyperboloid (*H'*), das durch Bewegung einer Geraden längs (2), (3), (4) als Leitlinien erzeugt ist. Da die Geraden (*A*) und (*A'*) auf diesen Leitlinien liegen, so sind sie gewisse Lagen der Erzeugenden von (*H'*) und liegen daher in allen ihren Punkten auf diesem Hyperboloid.

Im Falle des Zusammenfallens der Geraden (*A*) und (*A'*) in eine einzige Gerade (*A*) haben die Hyperboloide (*H*) und (*H'*) in jedem Punkte der Doppelgeraden (*A*) eine gemeinsame Tangentenebene.

Man kann die Gerade (5), welche (A) und (A') schneiden soll, einer der weiteren Bedingungen unterwerfen: a) durch einen gegebenen Punkt M zu gehen, b) einer gegebenen Geraden (B) parallel zu sein, c) in einer gegebenen Ebene (P) zu liegen.

Fallen (A) und (A') nicht zusammen, so ist bei der ersten dieser Bedingungen die Gerade (5) die Schnittlinie der durch jene Geraden und den Punkt M gehenden Ebenen; bei der zweiten Bedingung bestimmt sich (5) als Schnittlinie der durch (A) und (A') parallel zu (B) gelegten Ebenen; endlich bei der dritten Bedingung hat man für (5) die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden (A) und (A') mit der Ebene P zu nehmen.

Fallen jedoch die Geraden (A) und (A') in eine (A) zusammen, so hat man im ersten Falle für (5) die Verbindungslinie des Punktes M mit dem Berührungspunkte der durch M und (A) gehenden Ebene mit dem Hyperboloide (H) oder (H') zu nehmen; bei der zweiten Bedingung die Gerade, die man durch den Berührungspunkt der durch (A) parallel (B) gelegten Ebene mit (H) oder (H') parallel zu (B) legen kann; bei der dritten die Schnittlinie der Ebene P mit der Berührungsebene von (H) oder (H') im Schnittpunkte der Geraden (A) mit der Ebene (P).

Hat man einmal die Gerade (5) gefunden, so lassen sich die Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$, $\overline{F^{IV}}$ folgendermassen bestimmen.

Durch den Schnittpunkt von (A) und (5) zieht man die Erzeugende (C) der Schaar (1), (2), (3) des Hyperboloids (H) und die Erzeugende (C') der Schaar (2), (3), (4) des Hyperboloids (H'); dann bestimmt man in derselben Weise, wie bei dem vorigen Falle ($n = 4$) gezeigt wurde, vier Kräfte $\overline{F}$, $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, so dass sie sich im Gleichgewicht befinden und längs den Geraden (1), (2), (3), (C) resp. gerichtet sind, wobei man den Schnittpunkt der Geraden (A) und (5) als Angriffspunkt der Kraft $\overline{R}$ wählt.

Da die Gerade (5) mit (C) und (C') in derselben Ebene liegt, nämlich in der durch (A') gehenden Ebene oder in der Berührungsebene von (H) und (H'), so lassen sich längs den

drei Geraden (5), (*C*), (*C'*), die sich in einem Punkt schneiden, drei Kräfte $\overline{R}, \overline{R'}, \overline{F^{IV}}$ so anbringen, dass $\overline{F^{IV}} = \overline{R} + \overline{R'}$ wird.

Nun fügt man zu der Kraft $\overline{R'}$ drei Kräfte $\overline{P'}, \overline{Q'}, \overline{F'''}$ hinzu, die mit $\overline{R'}$ im Gleichgewicht und längs den Geraden (2), (3), (4) gerichtet sind; dabei wählt man als Angriffspunkte von $\overline{P'}$ und $\overline{Q'}$ die von $\overline{P}$ und $\overline{Q}$. Dadurch erhält man nunmehr zwei Systeme von Kräften

$$\overline{F}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R} \text{ und } \overline{P'}, \overline{Q'}, \overline{F'''}, \overline{R'},$$

die im Gleichgewichte sind; diese beiden Systeme bilden zusammen das eine Kräftesystem

$$\overline{F}, \overline{F'} = P + P', \overline{F''} = Q + Q', \overline{F'''}, \overline{F^{IV}} = \overline{R} + \overline{R'},$$

das gleichfalls im Gleichgewicht ist und dessen Kräfte längs den Geraden (1), (2), (3), (4), (5) gerichtet sind.

Giebt es keine reellen Transversalen (*A*) und (*A'*) für die gegebenen Geraden (1), (2), (3), (4), so kann man die gesuchten fünf Kräfte in folgender Weise construiren.

Man zieht eine Gerade (*G*), die die Geraden (1), (2), (3), schneidet, d. h. eine Erzeugende des Hyperboloids (*H*) ist, und eine Gerade (*G'*), die (2), (3), (4) schneidet, also eine Erzeugende des Hyperboloids (*H'*) ist. Endlich denke man sich eine die Geraden (*G*) und (*G'*) schneidende Gerade (*L*). Diese letztere schneidet das Hyperboloid (*H*) in einem Punkte der Geraden (*G*) und ausserdem in einem gewissen zweiten Punkte (*m*); ebenso schneidet (*L*) das Hyperboloid (*H'*) einmal in einem Punkte der Geraden (*G'*) und ausserdem in einem gewissen zweiten Punkte (*m'*). Durch (*m*) zieht man die zu derselben Schaar wie (*G*) gehörige Erzeugende (*I*) des Hyperboloids (*H*) und durch (*m'*) die zu derselben Schaar wie (*G'*) gehörende Erzeugende (*I'*) von (*H'*). Dadurch erhält man zwei Gerade (*G*) und (*I*), die die vier Geraden (1), (2), (3), (*L*), und zwei andere (*G'*) und (*I'*), die die vier Geraden (2), (3), (4), (*L*) schneiden. Nunmehr bestimmt man noch zwei Hilfsgerade (*K*) und (*K'*) so, dass (*K*) die Geraden (*G*) und (*I*), (*K'*) aber die Geraden (*G'*) und (*I'*) schneidet und dass sie überdiess die eine der drei folgenden Bedingungen erfüllen: *a*) dass sie durch einen gegebenen Punkt *M* gehen, *b*) dass

sie einer gegebenen Geraden (B) parallel seien, oder c) dass sie in einer gegebenen Ebene (P) liegen.

Nach dem im Vorigen für den Fall der Existenz der beiden Transversalen (A) und (A') gegebenen Verfahren bestimmt man nun fünf Kräfte

$$\overline{F}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S},$$

die im Gleichgewichte sind und in die Richtungen der Geraden

$$(1), (2), (3), (L), (K)$$

fallen; ebenso bestimmt man fünf Kräfte

$$\overline{P'}, \overline{Q'}, \overline{F'''}, \overline{R'}, \overline{S'},$$

die im Gleichgewicht und längs den Geraden

$$(2), (3), (4), (L), (K')$$

gerichtet sind, wobei man für $\overline{R'}$ die der Kraft $\overline{R}$ entgegengesetzt gleiche wählt und die Kräfte $\overline{P'}$ und $\overline{Q'}$ an denselben Punkten wie $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ angreifen lässt. Die Kräfte $\overline{R}$ und $\overline{R'}$ sind für sich im Gleichgewicht; $\overline{P}$ und $\overline{P'}$ setzen sich zu einer Kraft $\overline{F'} = P + P'$ zusammen, die längs der Geraden (2) gerichtet ist; ebenso vereinigen sich $\overline{Q}$ und $\overline{Q'}$ zu einer Kraft $\overline{F''} = Q + Q'$ längs (3). Die Kräfte (S) und (S') kann man im Falle, dass die Geraden (K) und (K') sich in endlicher Entfernung schneiden, im Schnittpunkte dieser Geraden angreifen lassen und dann durch eine Einzelkraft $\overline{F^{IV}} = \overline{S} + \overline{S'}$ ersetzen, die längs einer gewissen Geraden (5) gerichtet ist, welche in der Ebene der Geraden (K) und (K') liegt. Sind aber (K) und (K') parallel, so hält den Kräften $\overline{S}$ und $\overline{S'}$ eine Kraft $-(\overline{S} + \overline{S'})$ Gleichgewicht, die gleich ihrer geometrischen Summe und längs einer gewissen, den Geraden (K) und (K') parallelen und mit ihnen in derselben Ebene gelegenen Geraden (5) gerichtet ist. Folglich kann man die Kräfte $\overline{S}$ und $\overline{S'}$ durch eine einzige $\overline{F^{IV}} = \overline{S} + \overline{S'}$ längs der Geraden (5) ersetzen.

Man erhält in dieser Weise jedenfalls fünf Kräfte

$$\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \overline{F'''}, \overline{F^{IV}},$$

die im Gleichgewicht und längs den Geraden

(1), (2), (3), (4), (5)

gerichtet sind. Diese Methode der Bestimmung von fünf im Gleichgewichte befindlichen Kräften lässt sich auch anwenden, wenn die Transversalen (A) und (A') existiren.

Aus der Construction der Geraden (K) und (K') sieht man, dass sie Stralen eines Liniencomplexes $[K]$ sind, der dadurch bedingt ist, dass die Geraden (1), (2), (3), (4), (L) ihm als Stralen angehören müssen. Vertauscht man (G) und (G') mit zwei anderen Erzeugenden (G_1) und (G'_1) der Hyperboloide (H) und (H') und construirt mit ihrer Hilfe die Geraden (I_1), (I'_1), (L_1), welche die neuen Lagen der Geraden (I), (I'), (L) darstellen, so kann man vermittelst der fünf Stralen (1), (2), (3), (4), (L_1) einen neuen Complex $[K_1]$ bestimmen, sowie zwei seiner Stralen (K_1) und (K'_1), die (K) und (K') ersetzen; dabei kann eine der drei oben erwähnten Nebenbedingungen, ganz wie bei der ersten Bestimmungsweise, unverändert bestehen bleiben. Hierauf kann man mit Hilfe der Geraden

$$(1), (2), (3), (4), (L_1), (K_1), (K'_1)$$

dieselben Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \overline{F'''}, F^{IV}$ bestimmen, die längs den Geraden (1), (2), (3), (4), (5) im Gleichgewicht sind. Dabei ist (5) die Schnittlinie der Ebene der Geraden (K) und (K') mit der Ebene der Geraden (K_1) und (K'_1); mithin ist (5) ein Stral der Congruenz, welche die gemeinsamen Stralen der beiden Complexe $[K]$ und $[K_1]$ bilden.

Die Gleichungen der Congruenz, unter deren Stralen die Gerade (5) gewählt werden muss, erhält man dadurch, dass man die beiden aus den Zeilen des Schemas (3) gebildeten Determinanten 5. Grades gleich Null setzt, also:

$$\begin{vmatrix} a\, a'\, a''\, a'''\, a^{IV} \\ b\, b'\, b''\, b'''\, b^{IV} \\ c\, c'\, c''\, c'''\, c^{IV} \\ \lambda\, \lambda'\, \lambda''\, \lambda'''\, \lambda^{IV} \\ \mu\, \mu'\, \mu''\, \mu'''\, \mu^{IV} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a\, a'\, a''\, a'''\, a^{IV} \\ b\, b'\, b''\, b'''\, b^{IV} \\ c\, c'\, c''\, c'''\, c^{IV} \\ \mu\, \mu'\, \mu''\, \mu'''\, \mu^{IV} \\ \nu\, \nu'\, \nu''\, \nu'''\, \nu^{IV} \end{vmatrix} = 0;$$

dies lässt sich auch schreiben:

$$\begin{aligned} &Aa^{IV} + Bb^{IV} + Cc^{IV} + L\lambda^{IV} + M\mu^{IV} = 0, \\ &A'a^{IV} + B'b^{IV} + C'c^{IV} + M'\mu^{IV} + N\nu^{IV} = 0. \end{aligned} \qquad (a)$$

Soll die Gerade (5) einer gegebenen Geraden (B) parallel sein, so hat man in diesen Gleichungen für a^{IV}, b^{IV}, c^{IV} die Cosinus der Winkel zu nehmen, welche (B) mit den Coordinatenaxen bildet. Sind x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden (5), so hat man:

$$\lambda^{IV} = c^{IV} y - b^{IV} z, \quad \mu^{IV} = a^{IV} z - c^{IV} x, \quad \nu^{IV} = b^{IV} x - a^{IV} y.$$

Setzt man diese Werthe von λ^{IV}, μ^{IV}, ν^{IV} in die Gleichungen (a) ein, so ergeben sich die Gleichungen der beiden Ebenen, deren Schnittlinie die Gerade (5) ist.

Nimmt man als Nebenbedingung für die Gerade (5) an, dass sie durch einen gegebenen Punkt M (x_1, y_1, z_1) gehen soll, und bezeichnet die Coordinaten irgend eines anderen Punktes von (5) mit x, y, z, so hat man:

$$a^{IV} : b^{IV} : c^{IV} : \lambda^{IV} : \mu^{IV} : \nu^{IV}$$
$$= (x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1) : \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z & x \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser Proportionen kann man aus den Gleichungen (a) die Unbekannten a^{IV}, b^{IV}, c^{IV}, λ^{IV}, μ^{IV}, ν^{IV} eliminiren, wodurch man zwei Gleichungen mit x, y, z als Variablen erhält; es sind wieder die Gleichungen zweier Ebenen, die sich in der Geraden (5) schneiden, nämlich:

$$(A - Mz_1)x + (B + Lz_1)y + (C - Ly_1 + Mx_1)z$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1, \tag{b}$$
$$(A' + Ny_1 - M'z_1)x + (B' - Nx_1)y + (C' + M'x_1)z$$
$$= A'x_1 + B'y_1 + C'z_1. \tag{c}$$

Wählt man endlich als Nebenbedingung die, dass die Gerade (5) in einer gegebenen Ebene (P)

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \tag{d}$$

liegen soll, so kann man zwei Punkte der Geraden (5) bestimmen, nämlich die Nullpunkte der Ebene (P) in den beiden Complexen (a). Betrachtet man x_1, y_1, z_1 in Gleichung (b) als Coordinaten des Nullpunktes der Ebene (P) im ersten Complexe, so ergeben sich die Gleichungen zur Bestimmung dieser Coordinaten, wenn man die Bedingung ausdrückt, dass die Gleichungen (b) und (d) bezüglich x, y, z identisch sein müssen, nämlich:

$$(A - Mz_1) : (B + Lz_1) : (C + Mx_1 - Ly_1) : (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = \alpha : \beta : \gamma : \delta .$$

Ebenso findet man, wenn x_1', y_1', z_1' die Coordinaten des Nullpunktes der Ebene P in dem 2. Complexe (a) sind, zur Bestimmung derselben die Proportionen:

$$(A' + Ny_1' - M'z_1') : (B' - Nx_1') : (C' + M'x_1') : (A'x_1' + B'y_1' + C'z_1') = \alpha : \beta : \gamma : \delta .$$

Hat man die Lage der Geraden (5) bestimmt, so lassen sich die Grössen der Kräfte F, F', ... F^{IV} aus den Gleichungen

$$\Sigma aF = 0, \ \Sigma bF = 0, \ \Sigma cF = 0, \ \Sigma \lambda F = 0, \ \Sigma \mu F = 0$$

ableiten. Wenn A die Determinante bezeichnet, welche die linke Seite der ersten Gleichung unter (a) ausmacht, und A_{rs} ihre Derivirte nach dem Elemente der r^{ten} Horizontal- und der s^{ten} Verticalreihe, so hat man:

$$F : F' : F'' : F''' : F^{IV} = A_{i,1} : A_{i,2} : A_{i,3} : A_{i,4} : A_{i,5} .$$

Die Beziehungen zwischen den Vectoren der Kräfte ergeben sich aus den Proportionen (11), S. 300.

5) $n = 6$. *Es sind sechs Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F}'$, ... $\overline{F}^{V}$ so zu bestimmen, dass sie im Gleichgewicht sind und dass die ersten 5 längs gegebenen Geraden (1), (2), ... (5) gerichtet sind.*

Wie in § 67 bewiesen, müssen die Richtungslinien von 6 im Gleichgewichte befindlichen Kräften sämmtlich Stralen eines und desselben Complexes sein. Man kann daher für die gesuchte Gerade (6) jeden Stral des durch die 5 gegebenen Geraden (1), (2) .. (5) bestimmten Complexes [K] wählen. Dabei kann man diese Gerade (6) noch einer der folgenden Nebenbedingungen unterwerfen: a) durch einen gegebenen Punkt M zu gehen, b) einer gegebenen Geraden (B) parallel zu sein, c) in einer gegebenen Ebene (P) zu liegen. Diese Bedingungen sind jedoch noch nicht genügend zur vollständigen Bestimmung der Lage der Geraden (6). Bei der ersten Bedingung kann man nämlich für (6) jeden durch den Punkt M hindurchgehenden Stral des Complexes [K] wählen; bei der zweiten Bedingung jeden der Geraden (B) parallelen Stral von [K]; endlich bei der dritten jeden in der Ebene (P) gelegenen Stral des Complexes, d. h. jede in dieser Ebene durch deren Nullpunkt gelegte Gerade.

Die Lösung des vorliegenden Problems über das Gleichgewicht von 6 Kräften lässt sich auf die Bestimmung zweier Kräftesysteme zurückführen, die je 5 Kräfte enthalten und jedes für sich im Gleichgewichte sind.

Zu diesem Zweck bildet man aus den gegebenen 5 Geraden (1), (2), (3), (4), (5) zwei Gruppen von je vieren, z. B.

(1), (2), (3), (4) und (2), (3), (4), (5).

Man bestimmt nun (nach dem Verfahren für den Fall $n = 5$) fünf im Gleichgewicht befindliche Kräfte

$$\overline{F}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}$$

derart, dass die 4 ersten längs den 4 Geraden der ersten Gruppe gerichtet sind; ebenso bestimmt man 5 im Gleichgewicht befindliche Kräfte

$$\overline{P'}, \overline{Q'}, \overline{R'}, \overline{F^{IV}}, \overline{S'},$$

so dass die 4 ersten längs den Geraden der zweiten Gruppe gerichtet sind und dass die Kraft $\overline{S'}$ derselben Nebenbedingung, wie $\overline{S}$ unterworfen ist. Infolge dessen werden die Richtungslinien (L) und (L') von $\overline{S}$ und $\overline{S'}$ in dieselbe Ebene fallen. Für die längs der Geraden (2) gerichteten Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{P'}$ kann man einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt wählen und diese Kräfte in eine einzige $\overline{F'} = P + P'$ zusammensetzen. Ebenso kann man die Kräfte $\overline{Q}$ und $\overline{Q'}$, sowie $\overline{R}$ und $\overline{R'}$ an je einem Punkt angreifen lassen und zu je einer Kraft $\overline{F''} = Q + Q'$, resp. $\overline{F'''} = R + R'$ zusammensetzen. Für das Gleichgewicht der in derselben Ebene liegenden Kräfte $\overline{S}$ und $\overline{S'}$ ist eine ihrer geometrischen Summe entgegengesetzt gleiche Kraft erforderlich, deren Richtungslinie sich wie im Falle $n = 3$ bestimmt, so dass sich auch die Kräfte $\overline{S}$ und $\overline{S'}$ durch eine Kraft $\overline{F^{V}} = \overline{S} + \overline{S'}$ ersetzen lassen. Man hat somit sechs Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \overline{F'''}, \overline{F^{IV}}, \overline{F^{V}}$ im Gleichgewichte, von denen die fünf ersten längs den gegebenen Geraden (1), (2), (3), (4), (5) gerichtet sind.

Die Grössen der Kräfte $\overline{S}$ und $\overline{S'}$ sind willkürlich; daher kann die Gerade (6) bei unveränderter Lage der Geraden (L) und (L') unendlich viele Lagen in der Ebene von (L) und (L') haben, muss aber durch deren Schnittpunkte hindurchgehen.

Haben die Geraden (1), (2), (3), (4) zwei reelle Transversalen (A) und (B) und die Geraden (2), (3), (4), (5) zwei reelle Transversalen (A') und (B'), so schneidet (L) sowohl (A) als (B), (L') aber (A') und (B'). In diesem Falle kann man also die Lage der Geraden (L) und (L') direct bestimmen, nachdem man eine der oben aufgeführten Nebenbedingungen für (6) angenommen hat. Jede dieser Bedingungen erfordert, dass (L) und (L') in derselben Ebene liegen. Jede in dieser Ebene liegende und durch den Schnittpunkt von (L) und (L') gezogene Gerade kann man für (6) wählen.

Wenn jede der Combinationen von je vieren der gegebenen fünf Geraden (1), (2), (3), (4), (5) reelle Transversalen zulässt, so lassen sich fünf Gerade (L), (L'), (L''), (L'''), (L^{IV}) bestimmen, die die Eigenschaft haben, dass jede von ihnen die Transversalen einer der Combinationen schneidet und überdies die für die Gerade (6) aufgestellte Nebenbedingung erfüllt. Combinirt man diese Geraden zu je zweien, so kann man aus jeder dieser Combinationen die Lage einer und derselben Geraden (6) bestimmen. Hieraus folgt, dass die fünf Geraden (L), (L'), (L''), (L'''), (L^{IV}) sämmtlich in einer Ebene liegen und sich in einem und demselben Punkte in endlicher oder unendlicher Entfernung schneiden müssen. Dieser Satz rührt von Sylvester her.*)

Im Falle $n = 6$ ist in dem Schema (3) die Anzahl der Zeilen gleich der der Colonnen, so dass dasselbe nur eine Determinante liefert; setzt man dieselbe gleich Null, so ergiebt sich eine Gleichung von der Form:

$$Aa^V + Bb^V + Cc^V + L\lambda^V + M\mu^V + N\nu^V = 0; \qquad (a)$$

diese Gleichung zwischen den Coordinaten der Geraden (6) repräsentirt den Liniencomplex [K]. Unterwirft man die Gerade (6) der Nebenbedingung, durch einen gegebenen Punkt $M\,(x_1, y_1, z_1)$ zu gehen, so findet man leicht die Gleichung der Ebene, die alle Lagen der Geraden (6) enthält. Man braucht dazu nur in Gleichung (a) für die Coordinaten der Geraden (6) die ihnen proportionalen Grössen

*) J. J. Sylvester: „Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considérées comme des axes de rotation." Comptes rendus des séances de l'Acad. des sciences (Paris 1861), T. 52. Siehe auch Kinematik S. 383.

$$(x - x_1),\ (y - y_1),\ (z - z_1),\ \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z & x \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

einzusetzen, wenn x, y, z die variablen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden (6) bedeuten. So erhält man die Gleichung:

$$(A - Mz_1 + Ny_1)x + (B - Nx_1 + Lz_1)y + (C - Ly_1 + Mx_1)z$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1. \qquad (b)$$

Ist die Nebenbedingung die, dass die Gerade (6) einer gegebenen Geraden (B) parallel sein soll, so hat man für a^V, b^V, c^V die Cosinus der Winkel zu setzen, welche (B) mit den Coordinatenaxen bildet, und die Grössen λ^V, μ^V, ν^V so zu bestimmen, dass sie der Gleichung (a) und der Gleichung

$$a^V\lambda^V + b^V\mu^V + c^V\nu^V = 0$$

genügen.

Setzt man in Gleichung (a)

$$\lambda^V = \begin{vmatrix} b^V & c^V \\ y & z \end{vmatrix},\ \mu^V = \begin{vmatrix} c^V & a^V \\ z & x \end{vmatrix},\ \nu^V = \begin{vmatrix} a^V & b^V \\ x & y \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich als Gleichung der, alle Lagen der Geraden (6) enthaltenden Ebene die folgende:

$$(Nb^V - Mc^V)x + (Lc^V - Na^V) + (Ma^V - Lb^V) = Aa^V + Bb^V + Cc^V.$$

Ist endlich die Nebenbedingung die, dass die Gerade (6) in einer Ebene (P)

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \qquad (c)$$

liegen soll, so ergeben sich die Coordinaten des Punktes, durch welchen die Gerade (6) gehen muss, indem man die folgenden Gleichungen nach x_1, y_1, z_1 auflöst:

$$(A - Mz_1 + Ny_1) : (B - Nx_1 + Lz_1) : (C - Ly_1 + Mx_1) : (Ax_1 + By_1 + Cz_1)$$
$$= \alpha : \beta : \gamma : \delta;$$

dieselben drücken die Bedingung aus, dass die Gleichungen (b) und (c) in x, y, z identisch sind. Der Punkt (x_1, y_1, z_1) ist der Nullpunkt der Ebene (P) und jede in dieser Ebene durch ihn gezogene Gerade kann für (6) gewählt werden.

Kennt man die Coordinaten der Geraden (6), so kann man die Verhältnisse der Kräfte aus den Gleichungen (2) erhalten. Bezeichnet A die Determinante (3) und $A_{r,s}$ ihre Derivirte nach der r^{ten} Horizontal- und s^{ten} Verticalreihe, so hat man:

$$F : F' : F'' : F''' : F^{IV} : F^{V}$$
$$= A_{i,1} : A_{i,2} : A_{i,3} : A_{i,4} : A_{i,5} : A_{i,6}.$$

Die Verhältnisse der Vectoren der Kräfte ergeben sich wieder aus den Proportionen (11).

69. Untersuchen wir nun das Gleichgewicht eines Kräftesystems, bei dem die Anzahl der Kräfte grösser ist, als sechs.

Bestimmen wir zunächst sieben Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots \overline{F^{VI}}$, so dass sie im Gleichgewicht sind und dass die ersten sechs längs sechs gegebenen Geraden (1), (2), (3), (4), (5), (6) gerichtet sind. In diesem Falle kann die Richtungslinie (7) der letzten Kraft F^{VI} jede beliebige Lage im Raume haben; denn die sechs Gleichungen (2), S. 295, bestehen jetzt gleichzeitig bei beliebigen Werthen der Grössen a^{VI}, b^{VI}, c^{VI}, λ^{VI}, μ^{VI}, ν^{VI}, die die Bedingung

$$a^{VI}\lambda^{VI} + b^{VI}\mu^{VI} + c^{VI}\nu^{VI} = 0$$

erfüllen.

Bezeichnen A_1, A_2, ... A_7 die Determinanten sechsten Grades, die man dadurch erhält, dass man in dem Schema (3) der Reihe nach je eine Verticalreihe weglässt, so hat man:

$$F : F' : F'' : \ldots F^{VI} = A_1 : A_2 : A_3 : \ldots A_7.$$

Auch hier ergeben sich die Verhältnisse der Kräfte wieder aus den Proportionen (11).

Das gesuchte System der sieben Kräfte lässt sich folgendermassen construiren.

Man wählt die Gerade (7) willkürlich, nimmt auf ihr einen Punkt M an und construirt die Ebene (P), deren Nullpunkt in Bezug auf den von den fünf Stralen (1), (2), (3), (4), (5) bestimmten Complex $[K]$ der Punkt M ist, sowie die Ebene (P'), die in Bezug auf den von den fünf Stralen (2), (3), (4), (5), (6) bestimmten Complex $[K']$ den Punkt M zum Nullpunkt hat. Nun bestimmt man die Schnittlinien der Ebenen (P) und (P') mit einer beliebigen durch die Gerade (7) gelegten Ebene Q; es sei (A) die Schnittlinie von (P) und (Q), (A') die von (P') und (Q). Hierauf bestimmt man nach dem vorigen § sechs Kräfte

$$\overline{F}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}, \overline{T},$$

die längs den Geraden (1), (2), (3), (4), (5), (A) im Gleichgewicht sind, und ebenso sechs Kräfte

$$\overline{P'},\ \overline{Q'},\ \overline{R'},\ \overline{S'},\ \overline{F^V},\ \overline{T'},$$

die längs (2), (3), (4), (5), (6), (A') im Gleichgewicht sind, wobei man $\overline{T}$ und $\overline{T'}$ so wählt, dass sie in M angreifen und sich in eine längs (7) gerichtete Kraft $\overline{F^{VI}} = \overline{T} + \overline{T'}$ zusammensetzen lassen. Diese beiden Systeme bilden offenbar zusammen ein System von sieben Kräften

$$\overline{F},\ \overline{F'} = \overline{P} + \overline{P'},\ \overline{F''} = \overline{Q} + \overline{Q'},\ \overline{F'''} = \overline{R} + \overline{R'},$$
$$\overline{F^{IV}} = \overline{S} + \overline{S'},\ \overline{F^V},\ \overline{F^{VI}} = \overline{T} + \overline{T'},$$

die im Gleichgewicht und längs den Geraden

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ (5),\ (6),\ (7)$$

gerichtet sind.

Ist die Anzahl n der Kräfte, die im Gleichgewicht sein sollen, grösser als sieben, so sind die Richtungslinien und Grössen von zwei oder mehr Kräften willkürlich.

Hat man die Richtungen und Grössen der Kräfte

$$\overline{F^{VI}},\ \overline{F^{VII}},\ \ldots\ \overline{F^{(n-1)}}$$

willkürlich angenommen, so kann man auch die Richtungslinien (1), (2), (3), (4), (5), (6) der sechs übrigen Kräfte willkürlich wählen. Hierauf lassen sich, da man die Coordinaten der Richtungslinien aller Kräfte kennt, mit Hilfe der Gleichungen (2) die Grössen der sechs Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots \overline{F^V}$ als lineare Functionen der gegebenen Kräfte darstellen. Diese sechs Kräfte lassen sich folgendermassen construiren.

Man bestimmt, wie oben gezeigt wurde, sieben Kräfte

$$\overline{F_1},\ \overline{F_2},\ \overline{F_3},\ \overline{F_4},\ \overline{F_5},\ \overline{F_6},\ \overline{F^{VI}}$$

die längs den Geraden

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ (5),\ (6),\ (7)$$

im Gleichgewicht sind; ferner sieben Kräfte

$$F_1',\ F_2',\ F_3',\ F_4',\ F_5',\ F_6',\ F^{VII},$$

die längs den Geraden

$$(1),\ (2),\ (3),\ (4),\ (5),\ (6),\ (8)$$

im Gleichgewicht sind, u. s. f.; endlich sieben Kräfte

$\overline{F_1^{(n-7)}}, \overline{F_2^{(n-7)}}, \overline{F_3^{(n-7)}}, \overline{F_4^{(n-7)}}, \overline{F_5^{(n-7)}}, \overline{F_6^{(n-7)}}, \overline{F^{(n-1)}},$
die gleichfalls im Gleichgewicht sind und zwar längs den Geraden (1), (2), (3), (4), (5), (6), (n); hierauf setzt man die längs derselben Geraden gerichteten Kräfte zusammen, wodurch man die Kräfte

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_1'} + \cdots \overline{F_1^{(n-7)}},$$
$$\overline{F'} = \overline{F_2} + \overline{F_2'} + \cdots \overline{F_2^{(n-7)}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{F^V} = \overline{F_6} + \overline{F_6'} + \cdots \overline{F_6^{(n-7)}}$$

erhält, die mit den Kräften $\overline{F^{VI}}, \overline{F^{VII}}, \ldots \overline{F^{(n-1)}}$ im Gleichgewicht sind.

Capitel V.

Aequivalenz der auf ein unveränderliches Punktsystem wirkenden Kräfte. — Reduction eines Kräftesystems auf eine oder zwei Kräfte. — Specielle Fälle der Aequivalenz der Kräfte.

70. Zwei Kräftesysteme heissen *äquivalent*, wenn jedem von ihnen ein und dasselbe Kräftesystem Gleichgewicht hält.

Den einfachsten Fall der Aequivalenz bieten zwei Kräfte dar, die einander geometrisch gleich und längs derselben Geraden gerichtet sind, aber an verschiedenen Punkten angreifen. Zwei solche Kräfte sind äquivalent, da eine und dieselbe, ihnen entgegengesetzt gleiche und längs derselben Geraden gerichtete Kraft jeder von ihnen Gleichgewicht hält. (Siehe § 67, Fall $n = 2$.)

Wenn zwei Kräftesysteme $(\overline{a}, \overline{a'}, \ldots)$ und $(\overline{b}, \overline{b'}, \ldots)$ zusammen ein System von im Gleichgewicht befindlichen Kräften $(\overline{a}, \overline{a'}, \ldots \overline{b}, \overline{b'}, \ldots)$ bilden, so bilden die den Kräften des zweiten Systems entgegengesetzt gleichen und längs denselben Geraden wie jene gerichteten Kräfte $(-\overline{b}, -\overline{b'}, \ldots)$ ein dem ersten äquivalentes System; denn das System $(\overline{b}, \overline{b'}, \ldots)$ hält jedem von ihnen das Gleichgewicht. Hat man z. B. nach den im vorhergehenden Capitel dargelegten Methoden im Gleichgewicht befindliche Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots \overline{F^{n-1}}$ bestimmt, so kann man zwei äquivalente Systeme

$$(\overline{F}, \overline{F'}, \ldots \overline{F^{(m)}}), (-\overline{F^{(m+1)}}, -\overline{F^{(m+2)}}, \ldots \overline{F^{(n-1)}})$$

bilden, indem man die Kräfte $\overline{F^{(m)}}, \overline{F^{(m+1)}}, \ldots$ durch die ihnen entgegengesetzt gleichen und längs denselben Geraden $(m+1), (m+2), \ldots (n)$ gerichteten Kräfte ersetzt.

Im Falle $n = 3$ sind die Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}$ einer einzigen $-\overline{F''}$ äquivalent, deren Richtungslinie (3) in der Ebene der Geraden (1) und (2) liegt und durch deren Schnittpunkt, mag derselbe im Endlichen oder im Unendlichen liegen, hindurchgeht.

Im Falle $n = 4$ sind die beiden Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}$ zwei Kräften $-\overline{F''}, -\overline{F'''}$ äquivalent, deren Richtungslinien (3) und (4) mit den Geraden (1) und (2) vier Lagen einer Erzeugenden eines geradlinigen Hyperboloids darstellen.

Sollen zwei Kräftesysteme äquivalent sein, so ist nothwendig und genügend, dass ihre Hauptvectoren und Hauptmomente für einen und denselben Ursprung geometrisch gleich sind.

In der That, sind $\overline{A}$ und $\overline{B}$ die Hauptvectoren, $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ die Hauptmomente zweier Kräftesysteme $(\overline{a}, \overline{a'}, \ldots), (\overline{b}, \overline{b'}, \ldots)$ für denselben Ursprung, so sind $\overline{A} - \overline{B}$ und $\overline{P} - \overline{Q}$ der Hauptvector und das Hauptmoment des Kräftesystems $(\overline{a}, \overline{a'}, \ldots, -\overline{b}, -\overline{b'}, \ldots)$, das aus den Kräften des ersten Systems und den den Kräften des zweiten entgegengesetzt gleichen Kräften besteht. Zur Aequivalenz der beiden gegebenen Kräftesysteme ist nun nothwendig und erforderlich, dass dieses dritte System im Gleichgewichte ist; diese Bedingung ist aber ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\overline{A} - \overline{B} = 0, \quad \overline{P} - \overline{Q} = 0, \quad \text{oder:}$$
$$\overline{A} = \overline{B}, \quad \overline{P} = \overline{Q}.$$

Auf Grund dieser Bedingung für die Aequivalenz der Kräfte kann man ein gegebenes Kräftesystem auf ein einfacheres reduciren, nämlich auf eine einzige oder auf zwei Kräfte, die man gewöhnlich die *Resultanten* des gegebenen Kräftesystems nennt.

71. Wenn ein gegebenes Kräftesystem $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ einer Einzelkraft äquivalent sein, also nur *eine* Resultante haben soll, so muss der Hauptvector $\overline{R}$ des Kräftesystems gleich dem Vector der Resultante und das Hauptmoment $\overline{K}$

des Systems gleich dem der Resultante sein. Dies ist nur dann möglich, wenn der Hauptvector $\overline{R}$ nicht gleich Null, das Hauptmoment $\overline{K}$ aber entweder gleich Null oder zu $\overline{R}$ senkrecht ist; folglich ist das Hauptmoment $\overline{K}$ allgemein dadurch bestimmt, dass seine Projection auf den Hauptvector verschwinden muss, also durch die Gleichung

$$K \cos (KR) = 0. \tag{1}$$

Die beiden Bedingungen, dass der Hauptvector nicht gleich Null, die Projection des Hauptmomentes $\overline{K}$ auf ihn aber gleich Null sein muss, sind nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend dazu, dass das Kräftesystem einer Einzelkraft äquivalent sei. Denn wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so lässt sich eine Kraft bestimmen, deren Vector $\overline{R}$ und deren Moment $\overline{K}$ ist, d. h. eine dem gegebenen Kräftesystem äquivalente Kraft.

Ist $\overline{K} = 0$, so ist der Hauptvector $\overline{R}$ selbst die Resultante aller Kräfte. Ist aber $\overline{K}$ nicht gleich Null, so ist die Resultante eine dem $\overline{R}$ geometrisch gleiche Kraft, in der zu $\overline{K}$ senkrechten und durch den Ursprung O hindurchgehenden Ebene, mit einem Arme $q = \frac{K}{R}$. Man kann daher allgemein sagen, dass *die Resultante eine dem Hauptvector geometrisch gleiche, längs der Centralaxe gerichtete Kraft ist* (s. § 64).

Die Gleichung (1) zeigt, dass, *wenn ein Kräftesystem einer Einzelkraft äquivalent ist, das kleinste Hauptmoment gleich Null ist*, und umgekehrt: wenn *das kleinste Hauptmoment gleich Null und die geometrische Summe aller Kräfte nicht gleich Null ist, so ist das Kräftesystem einer Einzelkraft äquivalent.*

Bezieht man die Angriffspunkte der Kräfte auf ein rechtwinkliges Axensystem Ox, Oy, Oz, dessen Anfangspunkt der Ursprung der Argumente $\overline{R}$ und $\overline{K}$ ist, und bezeichnet man die Projectionen des Hauptvectors $\overline{R}$ auf diese Axen mit A, B, C, die des Hauptmomentes $\overline{K}$ mit L, M, N, so lässt sich die Gleichung (1) in folgender Form schreiben:

$$L \frac{A}{R} + M \frac{B}{R} + N \frac{C}{R} = 0,$$

oder

$$AL + BM + CN = 0 \text{ (s. § 65)};$$

dabei können die drei Grössen A, B, C nicht gleichzeitig Null sein, da R nicht gleich Null ist.

Da die Grössen A, B, C, L, M, N die Stralencoordinaten der Richtungslinie der Resultante sind, so ist:

$$\begin{aligned} L &= C\eta - B\zeta, \\ M &= A\zeta - C\xi, \\ N &= B\xi - A\eta; \end{aligned} \qquad (2)$$

dies sind für variable ξ, η, ζ die Gleichungen der betreffenden Geraden; sie sind mit den Gleichungen (43), S. 293, welche die Centralaxe darstellen, identisch, wenn die Invariante

$$\overline{RK} = AL + BM + CN$$

gleich Null ist.

Betrachten wir nun die bemerkenswerthesten Kräftesysteme, die sich auf eine Einzelkraft als Resultante reduciren lassen.

72. *Kräfte, die in einer Ebene liegen.* Gesetzt, die Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... liegen in derselben Ebene (P) und ihre geometrische Summe $\Sigma\overline{F}$ sei nicht gleich Null. Wählt man als Ursprung für die Momente und Vectoren einen beliebigen Punkt O der Ebene (P), so ergiebt sich ein von Null verschiedener Vector $\overline{R} = \Sigma\overline{F}$. Die Momente aller Kräfte fallen in die im Punkte O auf (P) errichtete Senkrechte nach der einen oder anderen Seite der Ebene. Daher fällt auch das Hauptmoment $\overline{K} = \Sigma\overline{MF}$ in diese Senkrechte, wenn es nicht gleich Null ist. Da aber $\overline{R}$ in der Ebene (P) liegt, so ist $\overline{K}$ senkrecht auf $\overline{R}$, d. h. die Bedingung (1) ist erfüllt. Also *lässt sich jedes System von Kräften, die in einer Ebene liegen, immer dann auf eine Einzelkraft reduciren, wenn die geometrische Summe aller Kräfte nicht gleich Null ist.*

Da die Momente MF, MF', ... in dieselbe Gerade fallen, so reducirt sich ihre geometrische Summe $\Sigma\overline{MF}$ auf eine algebraische ΣMF, in der jedes Glied die Fläche eines Parallelogramms darstellt, dessen gegenüberliegende Seiten die Kraft $\overline{F}$ selbst und ihr Vector VF sind. Diese Fläche ist gleich

dem Producte der Kraft $\overline{F}$ in den Arm, d. h. in das von O auf die Richtungslinie der Kräfte gefällte Perpendikel. Die positiven Glieder in der Summe ΣMF rühren von denjenigen Kräften her, die für einen an $\overline{K}$ sich anlehnenden Beobachter nach rechts, die negativen von Kräften, die nach links hin wirken. Um also das Hauptmoment $\overline{K}$ zu bestimmen, hat man folgendermassen zu verfahren: man berechnet die Flächen der Parallelogramme, die die Momente aller Kräfte ausdrücken, bestimmt hierauf die Summe der Flächen, welche den nach der einen Seite hin wirkenden Kräften entsprechen, sowie die Summe der Flächen, die den im anderen Sinne wirkenden Kräften entsprechen, und subtrahirt die kleinere Summe von der grösseren; die Differenz giebt die Grösse des Hauptmomentes K und eine ihr gleichwerthige von O aus senkrecht zu (P) aufgetragene Strecke (nach der Seite hin, wohin die der grösseren Summe entsprechenden Momente gerichtet sind) repräsentirt das Hauptmoment $\overline{K}$ selbst. Die Resultante aller Kräfte ist eine dem Hauptvector $\overline{R}$ geometrisch gleiche Kraft mit dem Arm $q = \frac{K}{R}$.

Nimmt man in der Ebene (P) rechtwinklige Coordinatenaxen Ox, Oy und eine zu (P) senkrechte Axe Oz an, so hat man in den allgemeinen Formeln des § 64 und § 65 zu setzen:

$$z = 0,\ z' = 0,\ \ldots\ Z = 0,\ Z' = 0,\ \ldots,$$

$$C = \Sigma Z = 0,\ L = \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = 0,\ M = \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} = 0,$$

$$N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = K;$$

hiermit reduciren sich die Gleichungen (2) der Resultante oder der Centralaxe (vergl. Gleichung (42), S. 292) auf die folgenden:

$$\zeta = 0,\ K = B\xi - A\eta, \tag{3}$$

mit

$$A = \Sigma X,\ B = \Sigma Y.$$

Hat man den Ursprung O der Momente auf der Resultante gewählt, so wird $K = 0$, d. h. $\Sigma MF = 0$; folglich hat die Richtungslinie der Resultante die Eigenschaft, dass *die algebraische Summe der Producte der Kräfte in die von einem be-*

liebigen Punkte dieser Geraden auf sie gefällten Perpendikel gleich Null ist.

In dem speciellen Falle von nur zwei Kräften $\overline{F}$ und $\overline{F'}$ sind *dieselben den von einem beliebigen Punkte ihrer Resultante auf sie gefällten Perpendikeln proportional.*

Diese Eigenschaft erfordert offenbar, dass die Richtungslinien der Kräfte $\overline{F}$ und $\overline{F'}$ und ihrer Resultante durch einen und denselben Punkt hindurchgehen, der in endlicher oder unendlicher Entfernung liegen kann, wie sich schon in § 66 für den Fall $n = 2$ ergeben hatte.

73. *Parallelkräfte.* Es sei ein System von Kräften $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ gegeben, die sämmtlich einer Geraden (l) parallel sind und deren geometrische Summe $\Sigma\overline{F}$ nicht gleich Null ist. Der Hauptvector $\overline{R} = \Sigma\overline{F}$ ist dann, welches auch der Ursprung sein mag, nicht gleich Null und ist dargestellt durch eine der Geraden (l) parallele Strecke gleich der Differenz der arithmetischen Summe der in dem einen und der arithmetischen Summe der in dem entgegengesetzten Sinne gerichteten Kräfte. Sein Sinn stimmt mit dem Sinne der die grössere Summe ergebenden Kräfte überein.

Da die Richtungslinie des Hauptvectors $\overline{R}$ mit den Richtungslinien der Vectoren aller einzelnen Kräfte zusammenfällt, so ist sie zu allen Momenten $\overline{MF}, \overline{MF'}, \ldots$ senkrecht, so dass diese letzteren sämmtlich in einer zu $\overline{R}$ senkrechten Ebene liegen müssen; in diese Ebene fällt auch ihre geometrische Summe $\overline{K} = \Sigma\overline{MF}$, wenn dieselbe nicht verschwindet; folglich ist das Hauptmoment $\overline{K}$, wenn es nicht gleich Null ist, zu $\overline{R}$ senkrecht, also die Bedingung (1) erfüllt.

Ein System von Kräften, die einer Geraden parallel sind, lässt sich also immer auf eine Einzelkraft reduciren, wenn die geometrische Summe der Kräfte nicht verschwindet.

Die Resultante ist geometrisch gleich dem Hauptvector $\overline{R}$; folglich ist sie parallel der Geraden (l) und stimmt dem Sinne nach mit der grösseren der beiden arithmetischen Summen überein, die man durch Addition der in demselben Sinne gerichteten Kräfte erhält.

Wählt man den Ursprung der Momente auf der Richtungslinie der Resultante, so ist das Hauptmoment $\overline{K}$ gleich Null; daher wird auch die Summe der Projectionen aller Momente auf eine Axe $\overline{\sigma}$, die beliebig durch einen solchen Ursprung gelegt ist, gleich Null, was sich durch die Gleichung (35), S. 286,

$$\Sigma F \binom{F}{\sigma} = 0$$

ausdrücken lässt.

Bezeichnet δ das Perpendikel vom Angriffspunkte einer Kraft $\overline{F}$ auf die Ebene der Geraden $\overline{\sigma}$ und $\overline{R}$ (dasselbe ist gleich dem kürzesten Abstande der Kraft $\overline{F}$ und der Axe $\overline{\sigma}$ von einander), so hat man (s. § 59):

$$F \binom{F}{\sigma} = \delta F \sin(F\sigma).$$

Da aber $\overline{F}$ parallel $\overline{R}$ ist, so ist $\sin(F\sigma) = \pm \sin(R\sigma)$, wobei das positive oder negative Zeichen gilt, je nachdem die Kraft $\overline{F}$ für einen Beobachter $\overline{\sigma}$ nach rechts oder nach links gerichtet ist. Dadurch geht die obige Gleichung nach Division durch den allen Gliedern gemeinsamen Factor $\sin(R\sigma)$ über in

$$\Sigma F\delta = 0;$$

hierin bezeichnet F die Grösse einer Kraft mit dem positiven oder negativen Zeichen, je nachdem sie von gleichem oder von entgegengesetztem Sinne wie $\overline{R}$ ist. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung, dass, wenn man die Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, ... als positive oder negative, in ihren resp. Angriffspunkten concentrirte Massen ansieht, die Summe der Momente dieser Massen bezüglich jeder durch die Resultante jener Kräfte hindurchgehenden Ebene gleich Null ist. Dies erfordert aber, dass die Richtungslinie der Resultante durch den Mittelpunkt (C) des Massensystems gehe. Bestimmt man also nach den in dem Abschnitte B der Geometrie der Massen gegebenen Regeln diesen Punkt und lässt in ihm eine dem Hauptvector geometrisch gleiche Kraft $\overline{R}$ angreifen, so ist diese die Resultante der Parallelkräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ...

Der Mittelpunkt eines Systems von Massen, die mit einem

System von Parallelkräften gleichwerthig und in den Angriffspunkten dieser Kräfte concentrirt sind, heisst der Mittelpunkt der Parallelkräfte.

Wenn die unveränderlich unter einander verbunden gedachten Angriffspunkte der Kräfte eine beliebige Rotationsverschiebung um den Mittelpunkt (C) erhalten, während die Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ einer Geraden (l) parallel bleiben und ihre Grösse und Richtung beibehalten, so liegt nach der Verschiebung der Punkte der Mittelpunkt des neuen Systems von Parallelkräften wiederum in (C); folglich haben die Kräfte dieselbe im Punkte (C) angreifende Resultante $\overline{R}$.

Wenn also Parallelkräfte ihre Grösse und Richtung bei einer Rotation der Angriffspunkte um den Mittelpunkt dieser Kräfte beibehalten, so behält die Resultante dieser Kräfte, die im Mittelpunkte angreift, ihre Grösse, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt bei.

Die Existenz des Mittelpunktes der Parallelkräfte und die soeben bewiesene Eigenschaft desselben ergeben sich auch aus den Gleichungen (2) der Resultante.

Zerlegen wir zu diesem Zwecke die parallelen Kräfte in zwei Gruppen, nämlich in Kräfte von dem einen und in solche von dem entgegengesetzten Sinne; es sei $\overline{F}$ eine Kraft derjenigen Gruppe, die die grössere Summe liefert, $F^{(i)}$ aber die Grösse einer beliebigen anderen Kraft, die als positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem sie dem Sinne nach mit $\overline{F}$ übereinstimmt oder nicht; a, b, c seien die Cosinus der Winkel, welche $\overline{F}$ mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz bildet. Wenden wir nun auf den vorliegenden Fall die Formeln § 65, S. 292 und 293, an, so ergiebt sich

$$R = \Sigma F,\ A = aR,\ B = bR,\ C = cR,$$
$$L = c\Sigma Fy - b\Sigma Fz,$$
$$M = a\Sigma Fz - c\Sigma Fx,$$
$$N = b\Sigma Fx - a\Sigma Fy,$$

wodurch die Gleichungen (2) übergehen in

$$\begin{aligned} c(R\eta - \Sigma Fy) &= b(R\zeta - \Sigma Fz), \\ a(R\zeta - \Sigma Fz) &= c(R\xi - \Sigma Fx), \\ b(R\xi - \Sigma Fx) &= a(R\eta - \Sigma Fy). \end{aligned} \qquad (4)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass auf der Richtungslinie der Resultante ein Punkt liegt, dessen Coordinaten

$$\xi = \frac{\Sigma F x}{R}, \quad \eta = \frac{\Sigma F y}{R}, \quad \zeta = \frac{\Sigma F z}{R} \tag{5}$$

sind. Aus den Formeln (3), S. 24, ist ersichtlich, dass dieser Punkt der Mittelpunkt von Massen $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... ist, die sich in den Angriffspunkten (x, y, z), (x', y', z'), ... der Parallelkräfte befinden.

Da die Coordinaten (5) den Gleichungen (4) für alle Werthe von a, b, c genügen, so muss sich die Gerade (4) um den durch die Coordinaten (5) bestimmten Punkt C drehen, wenn die Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ..., ohne ihre Grösse zu ändern und indem sie einander parallel bleiben, sich um ihre respectiven, fest bleibenden Angriffspunkte drehen. Statt einer solchen Drehung der Kräfte kann man aber auch das System der Angriffspunkte der Kräfte um den Mittelpunkt C rotiren lassen, ohne die Grösse und Richtung der Kräfte zu ändern.

Man sieht aus den Formeln (5), dass man zur Bestimmung des Punktes C statt der Massen F, F', ... auch andere ihnen proportionale Massen wählen kann; daher ändert sich der Mittelpunkt der Parallelkräfte nicht, wenn diese Kräfte sämmtlich in demselben Verhältnisse wachsen oder abnehmen.

Man kann die Kräfte, ohne ihre Wirkung zu ändern, durch andere ersetzen, die an anderen, beliebig auf ihren Richtungslinien gewählten Punkten angreifen; dadurch verändert sich aber die Lage des Mittelpunktes C. Es kann also ein und dasselbe System von Parallelkräften unendlich viele Mittelpunkte haben, entsprechend den verschiedenen Lagen der Angriffspunkte; alle diese Lagen des Mittelpunktes C liegen aber auf einer Geraden, nämlich auf der Richtungslinie der Resultante.

74. *Der Schwerpunkt.* Jeder wägbare materielle Punkt wird von allen übrigen materiellen Punkten, die unserem Planeten und den Himmelskörpern angehören, angezogen, und zwar nach dem Newton'schen Gesetze umgekehrt proportional dem Quadrate der Abstände und proportional den Massen.

Gehört der angezogene Punkt zu den in der Nähe der

Erdoberfläche befindlichen Punkten, so ist wegen seiner grossen Entfernung von den Himmelskörpern deren Einwirkung auf ihn sehr gering im Vergleich zu der Wirkung der Masse des Erdsphäroids und der auf oder in der Nähe der Erdoberfläche befindlichen Körper und kann daher vernachlässigt werden.

Die Resultante aller der Kräfte, mit welchen das Erdsphäroid und die in dessen Nähe befindlichen Körper wirken, ist normal zu der Niveaufläche, welche sehr nahe mit der Oberfläche des Sphäroids selbst zusammenfällt und näherungsweise als eine Kugelfläche, oder genauer als Oberfläche eines an den Polen abgeplatteten Umdrehungsellipsoids angesehen werden kann.

Welches aber auch diese Niveaufläche sein mag, so bilden doch immer die Kräfte, mit denen das ganze Erdsphäroid die materiellen Punkte eines irdischen Körpers anzieht, dessen Dimensionen im Vergleich zu denen des Sphäroids sehr klein sind, äusserst kleine Winkel mit der Normale der durch irgend einen Punkt des Körpers gehenden Niveaufläche. Man kann daher diese Kräfte annähernd als Parallelkräfte von gleichem Sinne betrachten.

Da ferner die Beschleunigungen, mit welchen die materiellen Elemente eines Körpers fallen würden, sehr wenig von einander verschieden sind, so können sie als annähernd gleich angesehen werden, so dass die sie hervorbringenden Kräfte als annähernd proportional den entsprechenden kleinen Körperelementen zu betrachten sind. Die Resultante dieser Parallelkräfte macht das *Gewicht* des betreffenden Körpers aus; ihr Mittelpunkt heisst der *Schwerpunkt* des Körpers.

Ist m die wägbare Masse eines Körpers, dm eines ihrer Elemente und g die Beschleunigung seines Falles (die man gewöhnlich die *Schwerkraft* nennt), so ist $g\,dm$ eine jener Parallelkräfte oder das Gewicht des Elementes dm, während $gm = \int g\,dm$ das Gewicht des ganzen Körpers darstellt. Bezeichnet man in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz die geradlinigen Coordinaten des Elementes dm mit x, y, z, die des Schwerpunktes mit α, β, γ, so hat man nach den Formeln (5):

$$\alpha = \frac{\int x\,g\,dm}{gm}, \quad \beta = \frac{\int y\,g\,dm}{gm}, \quad \gamma = \frac{\int z\,g\,dm}{gm},$$

oder:

$$\alpha = \frac{\int x\,dm}{m}, \quad \beta = \frac{\int y\,dm}{m}, \quad \gamma = \frac{\int z\,dm}{m}.$$

Nach diesen Formeln bestimmt sich aber auch der *Massenmittelpunkt* oder der *Trägheitsmittelpunkt* von m (s. die Formeln (4), § 13 der Einleitung in die Statik und Dynamik und § 18 der Statik); *folglich fällt der Schwerpunkt eines Körpers mit seinem Trägheitsmittelpunkt zusammen.*

Die Methoden zur Bestimmung der Lage dieses Punktes in verschiedenartigen Körpern sind in dem Abschnitte B der Einleitung in die Statik und Dynamik behandelt.

Das Gewicht gm eines Körpers kann man durch eine im Schwerpunkte beginnende und längs der Normale der Niveaufläche, d. h. längs der Verticale gerichtete Strecke darstellen.

Nach der im vorigen § bewiesenen Eigenschaft des Mittelpunktes paralleler Kräfte ändert sich die Grösse und Lage dieser Strecke nicht, wenn der Körper um seinen Schwerpunkt rotirt. Hat man also durch Versuche zwei Gerade bestimmt, die im Körper die Richtungen der Schwere darstellen, so ergiebt sich der Schwerpunkt als Schnittpunkt dieser Geraden.

75. *Kräfte, die durch denselben Punkt gehen.* Ein System von Kräften $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ..., die alle durch einen und denselben Punkt O hindurchgehen, lässt sich auf eine Einzelkraft reduciren, die durch den Hauptvector $\overline{R}$ für O als Ursprung dargestellt ist. Denn für diesen Ursprung ist das Moment jeder Kraft, also auch das Hauptmoment $\overline{K}$ gleich Null.

Als Beispiel für Kräfte, die durch einen Punkt gehen, können die Kräfte dienen, mit denen ein Punktsystem von einem Punkte angezogen oder abgestossen wird. Es sei m eine continuirliche, vollkommen starre Masse, die von einem Punkt O angezogen wird. Infolge des Gesetzes der Gleichheit von Action und Reaction sind alle diese Anziehungskräfte den Kräften, mit denen die Elemente der Masse m den Punkt O anziehen, entgegengesetzt gleich; daher ist die Resultante der letzteren, wenn man sie im umgekehrten Sinne nimmt, die Resultante $\overline{R}$ der Anziehung der Elemente der Masse m durch den Punkt O.

Gesetzt z. B., es sei m die Masse einer Kugelschicht, die von zwei Kugeln begrenzt wird, deren Mittelpunkte in C liegen, und es sei die Dichtigkeit eines Elementes dm constant oder eine Function seines Abstandes von C. Nach § 28 ist die Kraft, mit welcher die Masse m einen äusseren Punkt O anzieht, gleich $\frac{m}{OC^2}$ und längs der Geraden OC von O nach C hin gerichtet. Daher ist auch die Resultante der Kräfte, mit denen der Punkt O die Massenelemente von m anzieht, gleich $\frac{m}{OC^2}$, aber längs der Geraden CO im Sinne von C nach O hin gerichtet; als Angriffspunkt dieser Kraft kann man jeden Punkt dieser Geraden wählen. Nimmt man C als Angriffspunkt, so zieht O die ganze Masse m wie einen einzigen Punkt an, der in C liegt und die Masse m besitzt.

Die Kräfte, mit denen ein im Inneren der Höhlung der Kugelschicht befindlicher Punkt O die Massenelemente der Schicht anzieht, halten sich Gleichgewicht.

Die Anziehungskräfte eines in der Masse m selbst gelegenen Punktes O reduciren sich auf eine Kraft $\frac{m'}{OC^2}$ längs CO, wobei m' der in einer Kugel vom Radius CO und vom Mittelpunkte C enthaltene Theil der Masse m ist.

Wenn die Schicht m von einer anderen Schicht m' angezogen wird, die von zwei Kugelflächen, deren Mittelpunkt C' ist, eingeschlossen wird, und wenn dabei die eine Masse ausserhalb der anderen liegt, so schneiden sich die Kräfte, mit denen die Massenelemente von m' die ganze Masse m anziehen, nach dem Vorigen in einem Punkte C und haben somit eine durch diesen Punkt gehende Resultante $\overline{R}$. Die Kraft, mit der die ganze Masse m von einem einzelnen Elemente dm' angezogen wird, ist $\frac{m\,dm'}{r^2}$, wenn r den Abstand des Elements dm' vom Punkte C bedeutet. Die Resultante R ist gleich $\frac{mm'}{CC'^2}$, d. h. *gleich dem Producte der Massen beider Schichten, dividirt durch das Quadrat des Abstandes ihrer Mittelpunkte; die Verbindungslinie der letzteren giebt zugleich ihre Richtung an.*

Die Kräfte, mit denen die Massenelemente von m die ganze Masse m' anziehen, reduciren sich auf eine der Resultante $\overline{R}$ entgegengesetzt gleiche Kraft. Daher hat man den Satz:

Zwei von concentrischen Kugelflächen begrenzte Kugelschichten oder zwei Vollkugeln, deren Dichtigkeiten entweder constant oder Functionen der Abstände der entsprechenden Elemente von den Mittelpunkten der Schichten sind, ziehen sich so an, als wären ihre Massen in ihren Trägheitsmittelpunkten concentrirt.

Dieser Satz ist im Allgemeinen auf andere Massen nicht anwendbar; denn die Resultante der Kräfte, mit denen die Elemente der Masse m den Punkt O anziehen, geht nicht immer durch den Trägheitsmittelpunkt der Masse m, und die Kräfte, mit denen die Elemente der Masse m von den Elementen einer anderen Masse m', von deren drei Dimensionen keine unendlich klein ist, angezogen werden, lassen sich nicht immer auf eine Einzelkraft reduciren.

76. Es sei O ein Punkt, der die Elemente einer Masse m nach einem beliebigen Gesetze anzieht oder abstösst, C der Trägheitsmittelpunkt von m, Ox, Oy, Oz ein rechtwinkliges Axensystem von der Lage, dass Ox in OC fällt, x, y, z die Coordinaten eines Elements dm bezüglich dieser Axen, r der Abstand des Elements dm vom Punkte O, $f(r)$ die Function, welche das Anziehungs- oder Abstossungsgesetz ausdrückt. Die Projectionen der Resultante $\overline{R}$ aller Kräfte, mit denen der Punkt O auf die Masse m einwirkt, sind durch die folgenden Integrale dargestellt:

$$A = \mp \int f(r) \frac{x}{r} dm, \quad B = \mp \int f(r) \frac{y}{r} dm, \quad C = \mp \int f(r) \frac{z}{r} dm.$$

In dem speciellen Falle $f(r) = r$, d. h. *wenn die Elementarkräfte der ersten Potenz der Abstände proportional sind*, hat man:

$$A = \mp \int x dm = \mp m . OC,$$
$$B = \mp \int y dm, \quad C = \mp \int z dm.$$

Da für jede durch den Massenmittelpunkt gehende Ebene die Summe der Momente gleich Null ist, hat man

$$B = 0, \quad C = 0;$$

folglich ist die Resultante $\overline{R}$ gleich $m . OC$ und hat die Rich-

tung der Axe Ox, d. h. sie fällt in eine Gerade, die durch den Trägheitsmittelpunkt der Masse geht. *Wenn also die Molecular-Anziehung oder -Abstossung der ersten Potenz des Abstandes der Molecüle von einander proportional ist, so wird jede Masse von einem Punkte gerade so angezogen, als wenn die Masse in ihrem Trägheitsmittelpunkte concentrirt wäre.* Für eine andere Form der Function $f(r)$ und eine beliebige Masse m sind im Allgemeinen die Functionen B und C nicht gleich Null, so dass also im Allgemeinen die Richtung der Resultante $\overline{R}$ nicht mit der durch den Trägheitsmittelpunkt der Masse gehenden Geraden Ox zusammenfällt.

Liegt der Punkt O, in dem sich die Richtungslinien der Kräfte schneiden, unendlich weit entfernt von den Angriffspunkten der Kräfte, so werden die Kraftrichtungen einander parallel und die Resultante geht durch den Mittelpunkt dieser Kräfte. Bei sehr grosser Entfernung des Punktes O von den Angriffspunkten der Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... muss daher die Gerade $\overline{R}$ einen sehr kleinen Winkel bilden mit der Verbindungslinie des Punktes O mit dem Mittelpunkte eines Systems von Massen, die den Kräften $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... gleich sind und sich in den Angriffspunkten dieser Kräfte befinden.

Wenn die Masse m von einem Punkte O angezogen wird, der sich in sehr grosser Entfernung OC von dem Massenmittelpunkte C (im Vergleich zu den Dimensionen der Masse) befindet, so kann man näherungsweise annehmen, dass die Resultante $\overline{R}$ der Anziehungskräfte durch C hindurchgeht und gleich $mf(OC)$ ist, wenn $f(r)$ das Gesetz der Anziehung ausdrückt; denn man kann die Kräfte, mit denen der Punkt O die Massenelemente von m anzieht, näherungsweise ansehen als parallel und als gleich den entsprechenden Elementen, multiplicirt mit einer und derselben Grösse $f(OC)$.

Wird die Masse m von der Masse m' angezogen und liegen die Mittelpunkte C und C' dieser Massen in sehr grosser Entfernung von einander (im Vergleich zu den Dimensionen der Massen), so kann man alle Kräfte, mit denen die Elemente der Masse m' die Masse m anziehen, näherungsweise als sich im Punkte C schneidend ansehen. Die Kraft, mit der ein

Element dm' die Masse m anzieht, ist dann gleich $mf(r)dm'$, wo r den Abstand des Elements dm' von C bezeichnet.

Man kann annehmen, dass diese Kräfte annähernd in dieselbe Gerade CC' fallen und dass $r = CC'$ ist; infolge dessen kann man als Resultante aller Kräfte, mit denen die Masse m' die Masse m anzieht, eine Kraft annehmen, die gleich $mm'f(CC')$ und längs der Geraden CC' im Sinne von C nach C' hin gerichtet ist. Die ihr entgegengesetzt gleiche Kraft repräsentirt dann annähernd die Resultante der Kräfte, mit denen die Masse m' von der ganzen Masse m angezogen wird.

Da die Dimensionen der Sonne, der Planeten und ihrer Trabanten, sowie der übrigen Himmelskörper im Vergleich zu den gegenseitigen Abständen ihrer Massenmittelpunkte sehr klein sind, so kann man annähernd die abgeleiteten Sätze auf diese Körper anwenden; ferner kann man wegen der kugelförmigen Gestalt der Sonne, der Planeten und ihrer Trabanten die Mittelpunkte ihrer Volumina annähernd als ihre Massenmittelpunkte annehmen, wenn man voraussetzt, dass ihre Masse homogen oder in concentrischen Schichten gleichmässig um den Mittelpunkt vertheilt ist.

77. Wenn die Richtungslinien aller Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ eine Gerade (l) im Endlichen oder im Unendlichen schneiden und wenn der Hauptvector $\overline{R}$ für irgend einen Punkt dieser Geraden als Ursprung in sie hineinfällt, so haben die Kräfte eine der Geraden (l) parallele oder mit ihr zusammenfallende Einzelkraft zur Resultante. Denn für irgend einen Punkt O von (l) als Ursprung werden alle Momente $\overline{MF}, \overline{MF'}, \ldots$ senkrecht zu (l); folglich ist die geometrische Summe $\overline{K} = \Sigma\overline{MF}$ entweder gleich Null oder gleichfalls senkrecht zu (l), also das Hauptmoment $\overline{K}$ senkrecht zu $\overline{R}$.

Die Resultante ist in diesem Falle eine Kraft, die $\overline{K}$ zum Moment hat und geometrisch gleich dem Hauptvector $\overline{R}$ ist.

78. Wie in § 68 bei dem Falle $n = 3$ bewiesen wurde, lässt sich jede Kraft in zwei Kräfte zerlegen; die Richtungslinien dieser Componenten müssen mit der gegebenen Kraft in derselben Ebene liegen und deren Richtungslinie in einem und demselben Punkte in endlicher oder unendlicher Entfer-

nung schneiden, können aber sonst beliebig gegeben sein. Man kann aber auch jede Kraft $\overline{F}$ in drei Kräfte zerlegen, die längs den Seiten eines beliebigen, in einer durch $\overline{F}$ gehenden Ebene gelegenen Dreiecks ABC gerichtet sind.

Um dies zu beweisen, verlegen wir die Kraft $\overline{F}$ an den Schnittpunkt ihrer Richtungslinie mit einer der Seiten des Dreiecks, z. B. an den Schnittpunkt D mit der Seite BC, d. h. wir ersetzen die Kraft $\overline{F}$ durch eine ihr geometrisch gleiche, im Punkt D angreifende Kraft, und zerlegen sie hier in zwei Kräfte $\overline{\alpha}$ und $\overline{\delta}$, so dass $\overline{\alpha}$ längs BC und $\overline{\delta}$ längs DA gerichtet ist. Hierauf verlegen wir die Kraft $\overline{\delta}$ nach A und zerlegen sie hier in zwei längs AC und AB gerichtete Kräfte $\overline{\beta}$ und $\overline{\gamma}$. Hierdurch ergeben sich drei längs den Seiten BC, AC, AB des Dreiecks gerichtete Kräfte $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, die der gegebenen Kraft $\overline{F}$ äquivalent sind. Eine der Kräfte $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ wird gleich Null, wenn der Punkt D mit einer der Ecken B, C zusammenfällt; fällt z. B. D mit B zusammen, so wird $\overline{\beta} = 0$, und $\overline{F}$ zerlegt sich unmittelbar in die beiden längs BC und BA gerichteten Kräfte $\overline{\alpha}$ und $\overline{\gamma}$.

Irgend drei längs den Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC gerichtete Kräfte können nicht im Gleichgewicht sein; denn die Resultante $\overline{\beta} + \overline{\gamma}$ von zweien von ihnen kann der dritten $\overline{\alpha}$ nicht entgegengesetzt gleich sein. Ist die geometrische Summe $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}$ nicht gleich Null, so haben die drei Kräfte eine Resultante $\overline{F}$, die man findet, wenn man die Resultante zweier der Kräfte mit der dritten zusammensetzt.

Bei der Zerlegung einer Kraft $\overline{F}$ in drei längs den Seiten eines gegebenen Dreiecks gerichtete Kräfte $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ wollen wir dieselben als positiv betrachten, wenn sie in demselben Sinne gerichtet sind, wie die Seiten BC, CA, AB, d. h. die erste im Sinne von B nach C, die zweite von C nach A, die dritte von A nach B; dagegen sollen die Kräfte als negativ angesehen werden, wenn sie den entgegengesetzten Sinn haben, so dass z. B. $\overline{\alpha}$ eine mit negativem Vorzeichen zu versehende

Kraft bedeuten soll, wenn sie im Sinne von C nach B gerichtet ist.

Kennt man die Grössen und Vorzeichen von $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, so kann man die Richtungslinie (l) von $\overline{F}$ construiren, und zwar folgendermassen. Man bestimmt den Schnittpunkt D der Geraden BC mit der Resultante von $\overline{\beta}$ und $\overline{\gamma}$, sowie den Schnittpunkt E der Geraden CA mit der Resultante von $\overline{\gamma}$ und $\overline{\alpha}$ und zieht die Verbindungslinie DE; dies ist die gesuchte Gerade (l). Man kann daher die drei Grössen α, β, γ als Coordinaten der Geraden (l) betrachten; dieselben treten als Coefficienten in der Gleichung der Geraden (l) auf, wenn man zur Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene ABC das in § 65 der Kinematik besprochene Coordinatensystem wählt.

Es seien q_1, q_2, q_3 die kürzesten Abstände eines Punktes M von den Geraden BC, CA, AB, und zwar derart mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen, dass sie für die Ecken des Dreiecks positiv werden; z. B. sei q_1 positiv, wenn M mit A zusammenfällt und auch überhaupt, wenn diese beiden Punkte auf derselben Seite von BC liegen. Auf Grund der in § 72, S. 327, bewiesenen Eigenschaft von Kräften, die in derselben Ebene liegen, hat man für jeden Punkt der Geraden (l) die Beziehung

$$\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 0;$$

dies ist also die Gleichung der Geraden (l).

Ist umgekehrt die Gleichung

$$\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 0$$

als Gleichung einer beliebigen Geraden (l) gegeben, so kann man die Coefficienten α, β, γ als die Grössen dreier, längs den Seiten des Dreiecks ABC gerichteter Kräfte ansehen, die einer längs (l) gerichteten Kraft $\overline{F}$ äquivalent sind. Die Grösse dieser Kraft ist durch die Formel

$$F = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A - 2\gamma\alpha\cos B - 2\alpha\beta\cos C}$$

ausgedrückt, worin A, B, C die inneren Winkel des Dreiecks ABC bedeuten.

Sind q_1, q_2, q_3 die Coordinaten eines beliebigen Punktes O in der Ebene ABC und wählt man diesen Punkt als Ur-

sprung der Momente, so ist $\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3$ die Summe der Momente der drei Kräfte $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ und muss daher gleich dem Momente der Kraft $\overline{F}$ sein. Aus dem Vorzeichen dieser Summe bestimmt sich der Sinn der Kraft, d. h. die Seite, nach welcher $\overline{F}$ für einen im Punkte O befindlichen und auf den Angriffspunkt von $\overline{F}$ hinschauenden Beobachter hingerichtet ist.

Bezeichnet h den Arm der Kraft $\overline{F}$, so ist

$$h = \pm \frac{1}{F}(\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3).$$

Ist längs derselben Geraden (l) noch eine zweite Kraft $\overline{F'}$ gerichtet, die sich in drei längs den Seiten des Dreiecks ABC gerichtete Kräfte $\overline{\alpha'}$, $\overline{\beta'}$, $\overline{\gamma'}$ zerlegen lässt, so ist

$$\alpha' = \pm \alpha \frac{F'}{F}, \quad \beta' = \pm \beta \frac{F'}{F}, \quad \gamma' = \pm \gamma \frac{F'}{F},$$

wo das positive oder negative Zeichen gilt, je nachdem F und F' dem Sinne nach übereinstimmen oder nicht.

Es sei $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, ... ein in der Ebene des Dreiecks ABC gelegenes Kräftesystem und $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$ die der Kraft $\overline{F^{(i)}}$ äquivalenten, längs den Seiten BC, CA, AB jenes Dreiecks gerichteten Kräfte.

Wenn die drei algebraischen Summen

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots &= \Sigma\alpha, \\ \beta + \beta' + \beta'' + \cdots &= \Sigma\beta, \\ \gamma + \gamma' + \gamma'' + \cdots &= \Sigma\gamma \end{aligned}$$

nicht gleich Null sind, so ergeben sie drei längs den Seiten des Dreiecks ABC gerichtete Kräfte, die der Resultante $\overline{R}$ der gegebenen Kräfte äquivalent sind. Die Gleichung der Richtungslinie dieser Resultante ist

$$q_1 \Sigma\alpha + q_2 \Sigma\beta + q_3 \Sigma\gamma = 0,$$

und die Grösse der Resultante ist ausgedrückt durch die Formel:

$$\begin{aligned} R = [(\Sigma\alpha)^2 + (\Sigma\beta)^2 + (\Sigma\gamma)^2 - 2(\Sigma\beta)(\Sigma\gamma)\cos A \\ - 2(\Sigma\gamma)(\Sigma\alpha)\cos B - 2(\Sigma\alpha)(\Sigma\beta)\cos C]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Das Trinom

$$q_1 \Sigma\alpha + q_2 \Sigma\beta + q_3 \Sigma\gamma$$

stellt die Grösse des Moments der Resultante dar, d. h. die

Grösse des Hauptmomentes $\overline{K}$ für den Ursprung $O(q_1, q_2, q_3)$. Das Vorzeichen dieses Ausdrucks bestimmt den Sinn der Resultante auf der Geraden (l).

Es seien

$$aq_1 + bq_2 + cq_3 = 0\,,$$
$$a'q_1 + b'q_2 + c'q_3 = 0\,,$$
$$a''q_1 + b''q_2 + c''q_3 = 0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die Gleichungen der Richtungslinien (l), (l'), (l''), ... der gegebenen Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, ...; ferner seien $\overline{P}$, $\overline{P'}$, $\overline{P''}$, ... fingirte Kräfte, die längs denselben Geraden gerichtet sind und sich nach den Seiten des Dreiecks ABC resp. in die Kräfte (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), ... zerlegen lassen. Nach dem Früheren ist dann:

$$\alpha = \pm a \frac{F}{P}, \quad \beta = \pm b \frac{F}{P}, \quad \gamma = \pm c \frac{F}{P}\,,$$
$$\alpha' = \pm a' \frac{F'}{P'}, \quad \beta' = \pm b' \frac{F'}{P'}, \quad \gamma' = \pm c' \frac{F'}{P'}\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

folglich:

$$\Sigma\alpha = \Sigma \pm a \frac{F}{P}, \quad \Sigma\beta = \Sigma \pm b \frac{F}{P}, \quad \Sigma\gamma = \Sigma \pm c \frac{F}{P}.$$

In dieser Weise kann man auf analytischem Wege die Resultante eines gegebenen, in einer Ebene gelegenen Kräftesystems finden.

79. In § 69 haben wir gesehen, dass sich sieben im Gleichgewicht befindliche Kräfte bestimmen lassen, die längs sieben gegebenen, von einander unabhängigen Geraden (1), (2), ... (7) gerichtet sind; dabei ist die Grösse der einen dieser Kräfte, $\overline{F}$, willkürlich. Die dieser letzteren entgegengesetzt gleiche Kraft ist den übrigen sechs Kräften äquivalent. Man sieht hieraus, dass sich jede Kraft in sechs Kräfte zerlegen lässt, die längs gegebenen Geraden gerichtet sind.

Der einfachste und bemerkenswertheste Fall einer solchen Zerlegung ist die *Zerlegung einer Kraft in sechs Kräfte, deren Richtungslinien die Kanten eines gegebenen Tetraeders sind.*

Es sei $\overline{F}$ die gegebene Kraft und $ABCD$ ein beliebiges

Tetraeder. Die Richtungslinie von $\overline{F}$ muss jedenfalls eine der Seitenflächen des Tetraeders treffen. Gesetzt, sie träfe die Seite ABC im Punkte E. Wir verlegen dann die Kraft $\overline{F}$ nach E und zerlegen sie hier in zwei Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$, so dass $\overline{P}$ in ED fällt, $\overline{Q}$ aber in eine Gerade der Ebene ABC; hierauf verlegt man die Kraft $\overline{P}$ nach dem Punkte D und zerlegt sie in drei Kräfte längs den Kanten DA, DB, DC; die Kraft $\overline{Q}$ aber zerlegt man, wie im vorigen § gezeigt wurde, in drei Kräfte längs den Seiten des Dreiecks ABC. Dadurch erhält man längs den Kanten des gegebenen Tetraeders $ABCD$ sechs Kräfte, welche ein der Kraft $\overline{F}$ äquivalentes System bilden.

Bezeichnen wir nun mit $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$, $\overline{c_1}$ die Kanten DA, DB, DC, im Sinne von D nach A, B, C hin genommen, und mit $\overline{a_2}$, $\overline{b_2}$, $\overline{c_2}$ die Kanten BC, CA, AB im Sinne von links nach rechts für einen auf der Ebene ABC stehenden Beobachter, dessen Kopf in D ist; ferner seien α_1, β_1, γ_1 die Componenten der Kraft $\overline{P}$ und α_2, β_2, γ_2 die der Kraft $\overline{Q}$, mit $+$ oder $-$ genommen, je nachdem ihr Sinn mit dem Sinne der entsprechenden Kanten $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$, $\overline{c_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{b_2}$, $\overline{c_2}$ übereinstimmt oder nicht.

Diese sechs, der gegebenen Kraft $\overline{F}$ äquivalenten Kräfte α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 lassen sich mit Hilfe der relativen Momente

$$\binom{F}{a_1}, \binom{F}{b_1}, \binom{F}{c_1}, \binom{F}{a_2}, \binom{F}{b_2}, \binom{F}{c_2},$$

welche die Richtungslinie von $\overline{F}$ mit den Kanten des Tetraeders $ABCD$ bildet, ausdrücken.

Nach dem Obigen ist nämlich das Moment der Resultante in Bezug auf eine beliebige Axe gleich der Summe der Momente der ihr äquivalenten Kräfte in Bezug auf dieselbe Axe; folglich ist:

$$F\binom{F}{a_1} = \alpha_1\binom{a_1}{a_1} + \beta_1\binom{b_1}{a_1} + \gamma_1\binom{c_1}{a_1} + \alpha_2\binom{a_2}{a_1} + \beta_2\binom{b_2}{a_1} + \gamma_2\binom{c_2}{a_1}.$$

Beachtet man aber, dass das relative Moment zweier in derselben Ebene gelegener Geraden gleich Null ist, so hat man

$$\binom{a_1}{a_1} = 0, \binom{b_1}{a_1} = 0, \binom{c_1}{a_1} = 0, \binom{b_2}{a_1} = 0, \binom{c_2}{a_1} = 0,$$

also:

$$F\binom{F}{a_1} = \alpha_2\binom{a_2}{a_1}, \quad \alpha_2 = F\binom{F}{a_1} : \binom{a_2}{a_1}.$$

Bezeichnet V das Volumen des Tetraeders $ABCD$, so ist nach § 59

$$V = \binom{a_2}{a_1} a_1 a_2,$$

so dass man findet:

$$\alpha_2 = \frac{F a_1 a_2}{V}\binom{F}{a_1}.$$

In ähnlicher Weise lassen sich alle der Kraft F äquivalenten Kräfte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ausdrücken; es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{F a_1 a_2}{V}\binom{F}{a_2}, \quad \beta_1 = \frac{F b_1 b_2}{V}\binom{F}{b_2}, \quad \gamma_1 = \frac{F c_1 c_2}{V}\binom{F}{c_2}, \\ \alpha_2 &= \frac{F a_1 a_2}{V}\binom{F}{a_1}, \quad \beta_2 = \frac{F b_1 b_2}{V}\binom{F}{b_1}, \quad \gamma_2 = \frac{F c_1 c_2}{V}\binom{F}{c_1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Zwischen diesen sechs Grössen besteht eine Gleichung, welche ausdrückt, dass die Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ in derselben Ebene liegen. Es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Componenten einer beliebigen, im Punkte D angreifenden Kraft $\overline{P}$ längs den Kanten $\overline{a_1}, \overline{b_1}, \overline{c_1}$, und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ drei längs den Kanten $\overline{a_2}, \overline{b_2}, \overline{c_2}$ wirkende Kräfte, die einer beliebigen in der Ebene ABC wirkenden Kraft $\overline{Q}$ äquivalent sind. Soll nun das System der Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ dem Kräftesystem

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \tag{7}$$

äquivalent sein, so müssen beide Systeme einen gemeinsamen Hauptvector $\overline{R}$ und ein gemeinsames Hauptmoment $\overline{K}$, daher auch eine gemeinsame Invariante $\overline{RK}$ haben; folglich muss nach Formel (39), S. 289, das relative Moment $PQ\binom{P}{Q}$ gleich der Summe der relativen Momente der Kräfte (7) sein. Beachtet man ferner, dass das relative Moment zweier in derselben Ebene gelegener Kräfte gleich Null ist, so folgt die Gleichung:

$$\begin{aligned} PQ\binom{P}{Q} &= \alpha_1\alpha_2\binom{a_1}{a_2} + \beta_1\beta_2\binom{b_1}{b_2} + \gamma_1\gamma_2\binom{c_1}{c_2} \\ &= \left\{\frac{\alpha_1\alpha_2}{a_1 a_2} + \frac{\beta_1\beta_2}{b_1 b_2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c_1 c_2}\right\} V. \end{aligned} \tag{8}$$

Damit die beiden Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ eine einzige Kraft $\overline{F}$ zur

Resultante haben, ist erforderlich, dass sie in einer Ebene liegen; es muss daher $\binom{P}{Q} = 0$ sein, woraus sich die zwischen den sechs, der Kraft $\overline{F}$ äquivalenten Kräften bestehende Gleichung in der folgenden Form ergiebt:

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{a_1 a_2} + \frac{\beta_1 \beta_2}{b_1 b_2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{c_1 c_2} = 0. \tag{9}$$

Diese Gleichung kann übrigens in einem Falle erfüllt sein, in welchem $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ zwar in derselben Ebene liegen, aber gleichwohl keine Resultante $\overline{F}$ geben, nämlich in dem Falle, dass $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ zwei parallele und gleiche Kräfte von entgegengesetztem Sinne sind.

Mit Hilfe der Formeln (6) lässt sich Gleichung (9) auf die folgende Form bringen:

$$a_1 a_2 \binom{F}{a_1}\binom{F}{a_2} + b_1 b_2 \binom{F}{b_1}\binom{F}{b_2} + c_1 c_2 \binom{F}{c_1}\binom{F}{c_2} = 0; \tag{10}$$

es ist dies eine Relation zwischen den relativen Momenten, welche die Richtungslinie von $\overline{F}$ mit den Kanten des Tetraeders $ABCD$ bildet.

Die Verhältnisse $\frac{\alpha_1}{F}, \frac{\beta_1}{F}, \frac{\gamma_1}{F}, \frac{\alpha_2}{F}, \frac{\beta_2}{F}, \frac{\gamma_2}{F}$ in Verbindung mit der Bedingung (9) oder die Grössen $\binom{F}{a_1}, \binom{F}{b_1}, \binom{F}{c_1}, \binom{F}{a_2}, \binom{F}{b_2}, \binom{F}{c_2}$ mit der Bedingung (10) können als Coordinaten der Richtungslinie der Kraft $\overline{F}$ gewählt werden.

Cayley*) und Zeuthen**) bedienten sich derartiger Stralencoordinaten statt der Plücker'schen in ihren Untersuchungen über die Complexe. Diese Coordinaten lassen sich leicht als Functionen der Plücker'schen darstellen.

Es seien x, y, z geradlinige, rechtwinklige Coordinaten irgend eines Punktes der Richtungslinie der Kraft $\overline{F}$; X, Y, Z die Projectionen von $\overline{F}$ auf die Coordinatenaxen;

$$a_{1,x},\ b_{1,x},\ c_{1,x},\ a_{2,x},\ b_{2,x},\ c_{2,x}$$

---

*) Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. XI, Part II.

**) Math. Annalen von A. Clebsch und Neumann, I. Bd. (1869), S. 432.

die Projectionen der Kanten $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$, $\overline{c_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{b_2}$, $\overline{c_2}$ auf die Axe der x;

$$a_{1,y},\ b_{1,y},\ c_{1,y},\ a_{2,y},\ b_{2,y},\ c_{2,y}$$

ihre Projectionen auf die Axe der y;

$$a_{1,z},\ b_{1,z},\ c_{1,z},\ a_{2,z},\ b_{2,z},\ c_{2,z}$$

ihre Projectionen auf die Axe der z. Nach Formel (27), S. 281, ist

$$Fa_1\binom{F}{a_1} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_{1,x} & a_{1,y} & a_{1,z} \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

woraus folgt:

$$\frac{\alpha_2}{F} = \frac{a_2}{FV}\left[a_{1,x}\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} + a_{1,y}\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} + a_{1,z}\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}\right].$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für die Grössen

$$\frac{\alpha_1}{F},\ \frac{\beta_1}{F},\ \frac{\gamma_1}{F},\ \frac{\beta_2}{F},\ \frac{\gamma_2}{F}.$$

80. Es sei $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... ein beliebiges Kräftesystem. Wir ersetzen jede dieser Kräfte durch sechs längs den Kanten eines gegebenen Tetraeders $ABCD$ gerichtete Kräfte und bezeichnen mit $\alpha_1^{(i)}$, $\beta_1^{(i)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$ diejenigen, welche die Kraft $\overline{F^{(i)}}$ ersetzen und resp. längs den Kanten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 gerichtet sind. Wenn man nun alle längs denselben Tetraederkanten gerichteten Kräfte in je eine Kraft zusammensetzt, so ergeben sich sechs Kräfte

$$\Sigma\alpha_1,\ \Sigma\beta_1,\ \Sigma\gamma_1,\ \Sigma\alpha_2,\ \Sigma\beta_2,\ \Sigma\gamma_2; \tag{11}$$

die resp. längs den Kanten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 gerichtet und zusammen dem gegebenen System der Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... äquivalent sind.

Hat das gegebene Kräftesystem eine einzelne Kraft zur Resultante, so müssen die Kräfte (11) der Bedingung (9) genügen, d. h. es muss sein:

$$\frac{\Sigma\alpha_1 . \Sigma\alpha_2}{a_1 a_2} + \frac{\Sigma\beta_1 . \Sigma\beta_2}{b_1 b_2} + \frac{\Sigma\gamma_1 . \Sigma\gamma_2}{c_1 c_2} = 0.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so reduciren sich die gegebenen Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... auf zwei Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$, von denen die eine die Resultante der durch den Punkt D gehenden

Kräfte $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\beta_1$, $\Sigma\gamma_1$ ist, die andere aber die Resultante der in der Ebene ABC liegenden Kräfte $\Sigma\alpha_2$, $\Sigma\beta_2$, $\Sigma\gamma_2$; *jedes Kräftesystem, das sich nicht auf eine Einzelkraft reduciren lässt, lässt sich daher auf zwei Kräfte reduciren.*

Da die Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ einander nie entgegengesetzt gleich sein können, so ist zum Gleichgewicht des Kräftesystems $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ erforderlich, dass sowohl $\lambda = 0$ als auch $\mu = 0$ sei; hierzu aber ist nothwendig, dass

$$\Sigma\alpha_1 = 0,\ \Sigma\beta_1 = 0,\ \Sigma\gamma_1 = 0,\ \Sigma\alpha_2 = 0,\ \Sigma\beta_2 = 0,\ \Sigma\gamma_2 = 0$$

sei. Die Gleichgewichtsbedingungen sind daher durch sechs Gleichungen von derselben Form dargestellt, worin ein gewisser Vorzug der Cayley'schen Coordinaten vor den Plücker'schen besteht.

Die obigen Gleichungen sind zum Gleichgewicht nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend, wenn die Angriffspunkte der Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ unveränderlich unter einander verbunden sind. Wegen der Aequivalenz des Systems $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$ mit dem Systeme $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ gehören der Hauptvector $\overline{R}$, das Hauptmoment $\overline{K}$ und die Invariante $\overline{RK}$ sowohl dem gegebenen Kräftesystem $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$, als auch dem Systeme der sechs Kräfte (11) und dem Systeme der beiden Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ an. Nach der Formel (39), S. 289, und nach Formel (8) des vorigen § ergiebt sich daher einerseits

$$\overline{KR} = \left[\frac{\Sigma\alpha_1\,\Sigma\alpha_2}{a_1\,a_2} + \frac{\Sigma\beta_1\,\Sigma\beta_2}{b_1\,b_2} + \frac{\Sigma\gamma_1\,\Sigma\gamma_2}{c_1\,c_2}\right] V,$$

andererseits aber auch

$$\overline{KR} = \lambda\mu \binom{\lambda}{\mu}.$$

Ein und dasselbe Kräftesystem $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ lässt sich auf verschiedene Weise auf zwei Resultanten $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ reduciren, je nach der Wahl des Tetraeders $ABCD$. Uebrigens kann man auf folgendem Wege zwei dem gegebenen Kräftesystem äquivalente Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ unabhängig von dem Tetraeder $ABCD$ finden. Man wählt eine beliebige Ebène ABC und ausserhalb derselben irgend einen Punkt D und zerlegt dann

jede Kraft $\overline{F^{(i)}}$ des Systems in zwei Kräfte $\overline{P^{(i)}}$ und $\overline{Q^{(i)}}$ so, dass $\overline{P^{(i)}}$ durch den Punkt D geht, $\overline{Q^{(i)}}$ aber in die Ebene ABC fällt; dann bildet man die Resultante $\overline{\lambda}$ aller durch D hindurchgehenden Kräfte $\overline{P}, \overline{P'}, \ldots$ und die Resultante $\overline{\mu}$ aller in der Ebene ABC liegenden Kräfte $\overline{Q}, \overline{Q'}, \ldots$

81. Man kann auch direct zwei Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ finden, die einem gegebenen Kräftesystem äquivalent sind, wenn man den Hauptvector $\overline{R}$ und das Hauptmoment $\overline{K}$ für einen beliebigen Ursprung O kennt.

Die gesuchten Kräfte müssen nämlich den Gleichungen

$$\overline{V\lambda} + \overline{V\mu} = \overline{R}; \ \overline{M\lambda} + \overline{M\mu} = \overline{K} \tag{12}$$

genügen, wobei noch die Bedingungen

$$\overline{V\lambda \,.\, M\lambda} = 0, \ \overline{V\mu \,.\, M\mu} = 0 \tag{13}$$

bestehen, die ausdrücken, dass der Vector jeder Kraft auf ihrem Momente senkrecht steht.

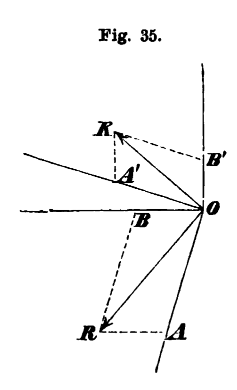


Fig. 35.

Man zerlegt (Fig. 35) den Hauptvector $\overline{R}$ in zwei Componenten OA und OB, legt durch O zwei dazu senkrechte Ebenen (P) und (Q) und eine dritte beliebige Ebene (S) durch das Hauptmoment $\overline{K}$. Bestimmt man nun die Schnittlinien der letzteren Ebene mit den beiden ersteren, so sind dies zwei resp. zu OA und zu OB senkrechte Gerade. Da diese Geraden in derselben Ebene liegen wie das Hauptmoment $\overline{K}$, so lässt sich $\overline{K}$ in zwei Componenten OA' und OB' längs ihnen zerlegen. Man sieht aus dieser Construction, dass die Gleichungen (12) und (13) erfüllt werden, wenn man setzt

$$V\lambda = OA, \ V\mu = OB,$$
$$M\lambda = OA', \ M\mu = OB'.$$

Construirt man mit Hilfe der Argumente OA und OA' die Kraft $\overline{\lambda}$ und mit Hilfe der Argumente OB und OB' die Kraft $\overline{\mu}$, so erhält man zwei Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$, die zusammen dem gegebenen Kräftesysteme äquivalent sind.

Die Kräfte $\overline{\lambda}$ *und* $\overline{\mu}$ *sind dadurch bedingt, dass ihr Product, multiplicirt mit dem relativen Momente ihrer Richtungslinien gleich der Invariante* $\overline{KR}$ *des gegebenen Kräftesystems sein muss* (vergl. Formel (39), S. 289), d. h.:

$$\lambda\mu\binom{\lambda}{\mu} = \overline{KR} = \Sigma FF'\binom{F}{F'}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch 6, so ergiebt sich

$$(\lambda, \mu) = \Sigma(F, F'),$$

d. h. *das Volumen eines Tetraeders* (λ, μ), *welches zwei dem gegebenen Kräftesystem äquivalente Kräfte* $\overline{\lambda}$ *und* $\overline{\mu}$ *zu gegenüberliegenden Kanten hat, ist gleich der algebraischen Summe der Volumina aller der Tetraeder, die man aus den gegebenen Kräften dadurch construiren kann, dass man die Kräfte paarweise als gegenüberliegende Tetraederkanten betrachtet.* Dieser Satz rührt von Möbius her.*) Demselben entspricht der in der Kinematik § 148 bewiesene Satz über die Rotationswinkelgeschwindigkeiten.

Es sei noch bemerkt, dass, wenn die Invariante $\overline{KR}$ nicht gleich Null ist, die Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ nicht in einer Ebene liegen können; denn das relative Moment $\binom{\lambda}{\mu}$ ist dann nicht gleich Null.

Die gegenseitige Lage der Richtungslinien (l) und (m) der Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ ist dadurch bedingt, dass diese Geraden conjugirte Polaren desjenigen Liniencomplexes $[K, R]$ sind, der (wie in § 66 erwähnt wurde) das Hauptmoment $\overline{K}$ und den Hauptvector $\overline{R}$ zu Parametern hat. Hiervon kann man sich folgendermassen überzeugen.

Multiplicirt man die Gleichungen (12) geometrisch mit $M\lambda$ und $V\lambda$ und addirt sie hierauf, so ergiebt sich:

$$\overline{RM\lambda} + \overline{KV\lambda} = \overline{V\mu \,.\, M\lambda} + \overline{M\mu \,.\, V\lambda}.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen (12) geometrisch mit einander, so findet sich:

---

*) Crelle's Journ., Bd. 4, S. 179; auch in Möbius' „Lehrbuch der Statik“ (1837), 1. Th., § 72, S. 121 u. S. 122 Anm.

$$\overline{KR} = \overline{V\mu \,.\, M\lambda} + \overline{M\mu \,.\, V\lambda};$$

folglich ist:

$$\overline{RM\lambda} + \overline{KV\lambda} = \overline{KR}.$$

Da nach der Voraussetzung die Invariante $\overline{KR}$ nicht verschwindet, so können die Argumente der Geraden $\overline{\lambda}$ nicht der Gleichung

$$\overline{RM\lambda} + \overline{KV\lambda} = 0$$

genügen, welche die Gleichung des Complexes $[K, R]$ ist; daher kann die Gerade (l) kein Stral des Complexes $[K, R]$ sein. Dasselbe lässt sich auch für die Gerade (m) beweisen.

Ist nun $\overline{\sigma}$ eine beliebige Strecke auf einer Geraden (A), so sind (vergl. Gleichung (14), § 59) die Bedingungen dafür, dass diese Gerade (A) die beiden Richtungslinien (l) und (m) schneidet, ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \overline{M\lambda \,.\, V\sigma} + \overline{V\lambda \,.\, M\sigma} &= 0, \\ \overline{M\mu \,.\, V\sigma} + \overline{V\mu \,.\, M\sigma} &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

durch Addition derselben erhält man:

$$\overline{(\overline{M\lambda} + \overline{M\mu}) V\sigma} + \overline{(\overline{V\lambda} + \overline{V\mu}) M\sigma} = 0. \qquad (15)$$

Diese Gleichung geht aber infolge der Beziehungen (12) über in die Gleichung

$$\overline{KV\sigma} + \overline{RM\sigma} = 0, \qquad (16)$$

welche zeigt, dass eine Gerade (A), die die Geraden (l) und (m) schneidet, ein Stral des Complexes $[K, R]$ ist. Umgekehrt schneidet aber auch jeder Stral (A) des Complexes $[K, R]$, der eine der beiden Geraden (l) und (m) schneidet, auch die andere; denn wenn man auf (A) eine Strecke $\overline{\sigma}$ annimmt, die der Gleichung (16) oder (15) zugleich mit einer der Gleichungen (14) genügt, so ist auch die zweite der Gleichungen (14) erfüllt. Zwei solche Gerade (l) und (m) aber, die die Eigenschaft haben, dass alle ihre Transversalen Stralen des Liniencomplexes sind, sind conjugirte Polaren dieses Complexes.

Man kann die Kraft $\overline{\lambda}$ willkürlich auf irgend einer Geraden (l),

die nicht zu den Stralen des Complexes $[K, R]$ gehört, wählen und mit Hilfe ihrer Argumente $\overline{V\lambda}$ und $\overline{M\lambda}$ die Argumente der ihr conjugirten Kraft $\bar{\mu}$, d. h. die Grössen

$$\overline{V\mu} = \overline{R} - \overline{V\lambda}, \quad \overline{M\mu} = \overline{K} - \overline{M\lambda},$$

bestimmen. Um die Gerade (m) zu construiren, wenn die Lage von (l) gegeben ist, wählt man auf der letzteren zwei Punkte (p) und (q) und construirt die Stralenebenen (P) und (Q) des Complexes $[K, R]$, welche die Punkte (p) und (q) zu Nullpunkten haben; die Schnittlinie der Ebenen (P) und (Q) ist dann (m). Trägt man auf dieser Geraden eine der Differenz $\overline{R} - \overline{V\lambda}$ geometrisch gleiche Strecke auf, so erhält man dadurch die Kraft $\bar{\mu}$.

Auf einem anderen Paare conjugirter Polaren (l') und (m') des Complexes $[K, R]$ kann man zwei andere Kräfte $\overline{\lambda'}$ $\overline{\mu'}$ annehmen, die dem gegebenen Kräftesystem, also auch den beiden Kräften $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ äquivalent sind.

Die vier Geraden (l), (m), (l'), (m') sind dann Lagen der Erzeugenden eines gewissen geradlinigen Hyperboloids (H). Denn jede Gerade (A), welche die drei Geraden (l), (m), (l') schneidet, ist ein Stral des Complexes $[K, R]$, der auch (m') schneidet; daher liegt (m') mit allen seinen Punkten auf dem durch die Bewegung der Geraden (A) längs den drei Leitlinien (l), (m), (l') erzeugten Hyperboloide (H). Dies stimmt auch mit dem überein, was in § 68 für den Fall $n = 4$ bezüglich des Gleichgewichts von vier Kräften bewiesen wurde. Die den Kräften $\overline{\lambda'}$ und $\overline{\mu'}$ entgegengesetzt gleichen Kräfte $-\overline{\lambda'}$ und $-\overline{\mu'}$ müssen nämlich mit den Kräften $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ im Gleichgewicht sein; nach § 68 (Fall $n = 4$) müssen aber die Richtungslinien (l), (m), (l'), (m') der vier im Gleichgewicht befindlichen Kräfte $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $-\overline{\lambda'}$, $-\overline{\mu'}$ auf einem geradlinigen Hyperboloide liegen.

Wendet man die im Anfange dieses § gegebene allgemeine Methode der Construction von zwei, einem gegebenen Kräftesystem äquivalenten Kräften auf den Specialfall an, dass $\overline{K}$ das kleinste Hauptmoment ist, d. h. dass sowohl $\overline{K}$, als auch

der Hauptvector $\overline{R}$ in die Axe des Complexes $[K, R]$ fallen, so ergeben sich die Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ folgendermassen.

Man zerlegt (Fig. 35) den Hauptvector $\overline{R}$ in die beiden Componenten OA und OB, errichtet in der Ebene AOB auf OA und OB Senkrechte und zerlegt nach ihnen das Hauptmoment $\overline{K}$ in die beiden Componenten OA' und OB'. Diese Componenten sind dann die Momente der gesuchten Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$.

Bezeichnet man die Arme dieser Kräfte mit p und q, so ist

$$p = \frac{OA'}{OA}, \quad q = \frac{OB'}{OB}, \tag{17}$$

wobei diese Arme beide auf einer zur Ebene AOB senkrechten Geraden aufzutragen sind.

Macht man $OC = p$ und $OC' = q$, so ist die durch C parallel zu OA gelegte Gerade die Richtungslinie (l) der Kraft $\overline{\lambda}$ und die durch C' gelegte Parallele zu OB die Richtungslinie (m) der Kraft $\overline{\mu}$; folglich ist die Kraft $\overline{\lambda}$ durch eine auf (l) aufgetragene, der OA geometrisch gleiche Strecke dargestellt und $\overline{\mu}$ durch eine auf (m) aufgetragene Strecke, die geometrisch gleich OB ist.

Man sieht aus dieser Construction leicht, dass

$$p = \frac{K}{R} \cot(\mu R), \quad q = \frac{K}{R} \cot(\lambda R)$$

ist, woraus sich die Proportion

$$p : q = \tan(\lambda R) : \tan(\mu R)$$

ergiebt; dieselbe zeigt, dass *die kürzesten Abstände zweier conjugirter Polaren von der Axe des Complexes [K, R] den Tangenten der Winkel, welche die Polaren mit der Axe bilden, proportional sind.**)

Die Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ haben im geometrischen Sinne dieselbe Bedeutung, wie die beiden conjugirten Rotationswinkelgeschwin-

---

*) Dieser Satz wurde von Chasles für zwei conjugirte Rotationsaxen in einem Systeme möglicher Geschwindigkeiten bewiesen, wenn diese Geschwindigkeiten durch eine Schraubenbewegung bestimmt sind, deren Translationsgeschwindigkeit gleich $\overline{R}$, deren Rotationswinkelgeschwindigkeit gleich $\overline{K}$ ist.

digkeiten, die einem Systeme von Geschwindigkeiten äquivalent sind, welches durch eine Schraubenbewegung von der Translationsgeschwindigkeit $\overline{R}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\overline{K}$ bestimmt ist.

Ueberhaupt lassen sich alle im Capitel XIV der Kinematik behandelten Eigenschaften der Rotationswinkelgeschwindigkeiten auch auf Kräfte übertragen.

82. Ist der Hauptvector $\overline{R}$ eines gegebenen Kräftesystems gleich Null, so reducirt sich die erste der Gleichungen (12) auf die folgenden

$$\overline{V\mu} = -\overline{V\lambda},$$

welche fordert, dass die Vectoren der Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$, also auch die Kräfte selbst geometrisch entgegengesetzt gleich seien. Ist dabei das Hauptmoment $\overline{K}$ nicht gleich Null, d. h. ist das gegebene Kräftesystem nicht im Gleichgewicht, so können die Kräfte $\overline{\lambda}$ und $\overline{\mu}$ nicht in dieselbe Gerade fallen.

Zwei entgegengesetzt gleiche, längs verschiedenen Geraden gerichtete Kräfte nennt man ein *Paar* (couple).

Ist also der Hauptvector oder die geometrische Summe der Kräfte eines Systems gleich Null, das System aber nicht im Gleichgewicht, so reducirt sich dasselbe auf ein Paar.

Die Geraden (l) und (m) sind in diesem Falle conjugirte Polaren des Complexes $[K, 0]$. Bezeichnet $\overline{\sigma}$ eine Strecke auf einem beliebigen Strale (A), so ist $\overline{KV\sigma} = 0$, d. h. alle Stralen des Complexes $[K, 0]$ sind senkrecht zu dem Hauptmomente $\overline{K}$. Da aber nach dem Früheren jede Gerade, die (l) und (m) schneidet, d. h. jede in der Ebene des Paares (λ, μ) liegende Gerade, ein Stral des Complexes ist, so muss das Hauptmoment K auf dieser Ebene senkrecht stehen.

Die Gleichung (37), S. 288,

$$\overline{K'} = \overline{K} - \overline{MR'},$$

welche die Beziehung zwischen den, zwei verschiedenen Anfangspunkten O und O' entsprechenden Momenten ausdrückt, wird im Falle $R' = 0$ zu $\overline{K} = \overline{K'}$. *Die Grösse und Richtung des Hauptmomentes $\overline{K}$ ist daher von der Wahl des Ursprungs unabhängig, wenn sich das gegebene Kräftesystem auf ein Paar reducirt.*

Das Hauptmoment $\overline{K}$ der gegebenen Kräfte ist zugleich auch das Moment des ihnen äquivalenten Paares $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$. Wählt man den Ursprung O auf der Richtungslinie (m) der Kraft $\overline{\mu}$, so ist $\overline{M\mu} = 0$, also $\overline{K} = \overline{M\lambda}$. Bezeichnet h den kürzesten Abstand der Geraden (l) und (m), so ist $K = \lambda h$.

Der kürzeste Abstand der Richtungslinien der Kräfte eines Paares heisst der *Arm* des Paares; man hat daher den Satz: *das Moment eines Paares ist gleich dem algebraischen Producte einer der Kräfte in den Arm des Paares.*

Poinsot*) nennt jede zur Ebene des Paares senkrechte Gerade eine *Axe* des Paares. Wählt man nun den Mittelpunkt des Armes h als Ursprung des Momentes $\overline{K}$, so sieht ein an $\overline{K}$ sich anlehnender und auf den Angriffspunkt der einen oder der anderen der das Paar bildenden Kräfte hinschauender Beobachter die Wirkung des Paares nach rechts hin vor sich gehen; denn dann ist das Moment jeder Kraft gleich $\frac{1}{2}K$ und hat dieselbe Richtung wie $\overline{K}$.

Sollen zwei Paare $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ und $(\overline{\lambda}', \overline{\mu}')$ äquivalent sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass ihre Momente einander geometrisch gleich sind. Hierzu aber ist hinreichend und erforderlich: 1) dass die Ebenen der beiden Paare zusammenfallen oder parallel sind, 2) dass das Product der Kraft in den Arm bei beiden Paaren dasselbe ist und 3) dass ein Beobachter, der auf der Ebene des einen Paares senkrecht steht und auf die Angriffspunkte der Kräfte der beiden Paare hinschaut, die Kräfte in demselben Sinne wirken sieht, d. h. bei beiden Paaren nach rechts hin oder bei beiden nach links hin.

Auf Grund dieser Aequivalenzbedingungen der Paare kann man ein Paar in ein anderes verwandeln, indem man es in derselben Ebene an einen anderen Ort, oder in eine andere, der ersten parallele Ebene verlegt, ohne die Grösse und Richtung des Moments des Paares zu ändern.

Sind zwei Kräftesysteme nicht im Gleichgewicht und reducirt sich jedes von ihnen auf ein Paar, so bilden sie zusammen ein System, das sich auch auf ein Paar reducirt.

*) Poinsot nennt auch das Moment $\overline{K}$ selbst ein Paar.

Denn da der Hauptvector jedes Systems gleich Null ist, so ist es auch der Hauptvector des ganzen Systems als die geometrische Summe der Hauptvectoren der beiden Systeme. Ferner ist das Hauptmoment des ganzen Systems gleich der geometrischen Summe der Hauptmomente der beiden Einzelsysteme; folglich ist das Moment des dem ganzen Systeme äquivalenten Paares die geometrische Summe der Momente der beiden, den gegebenen Einzelsystemen äquivalenten Paare.

Hieraus folgt unter anderem, dass zwei Paare $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ und $(\overline{\lambda'}, \overline{\mu'})$ von den Momenten $\overline{K}$ und $\overline{K'}$ sich in ein Paar von einem Momente gleich $\overline{K} + \overline{K'}$ zusammensetzen lassen.

Zum Gleichgewichte zweier Paare $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ und $(\overline{\lambda'}, \overline{\mu'})$ ist nothwendig und hinreichend, dass $\overline{K} + \overline{K'} = 0$ oder $\overline{K'} = -\overline{K}$ sei, d. h. dass ihre Momente einander geometrisch entgegengesetzt gleich seien.

83. Jede Kraft $\overline{F}$ lässt sich durch ein Paar und eine ihr geometrisch gleiche, in einem gegebenen Punkte O angreifende Kraft ersetzen. Um dies zu zeigen, lässt man im Punkte O eine der Kraft $\overline{F}$ geometrisch gleiche Kraft $\overline{F_1}$ und eine dieser entgegengesetzt gleiche Kraft $-\overline{F_1}$ angreifen. Dadurch erhält man statt $\overline{F}$ eine ihr geometrisch gleiche Kraft $\overline{F_1}$ und das Paar $(\overline{F}, -\overline{F_1})$. In dieser Weise kann man ein gegebenes Kräftesystem $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ durch, den gegebenen geometrisch gleiche, in einem Punkte O angreifende Kräfte $\overline{F_1}, \overline{F_1'}, \ldots$ und durch ein System von Paaren $(\overline{F}, -\overline{F_1})$, $(\overline{F'}, -\overline{F_1'})$, ... ersetzen. Das System der in O angreifenden Kräfte hat eine Resultante, die der Hauptvector $\overline{R}$ des gegebenen Kräftesystems ist; das System der Paare reducirt sich auf ein einziges Paar $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$, dessen Moment das Hauptmoment $\overline{K}$ des gegebenen Kräftesystems ist.

Ist $\overline{K}$ das kleinste Hauptmoment, so ist die Ebene des Paares $(\overline{Q}, -\overline{Q})$ zu dem Hauptvector $\overline{R}$ senkrecht.

Legt man das Paar so, dass die Mitte seines Armes in den Ursprung O fällt, so hat man eine Kraft $\overline{R}$, die diesen Punkt in der Richtung der Axe des Complexes $[K, R]$ zu ver-

schieben strebt und zwei Kräfte, die den Arm des Paares um diese Gerade zu drehen streben.

Doch folgt hieraus noch nicht, dass der Körper, auf den die Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ wirken, eine Schraubenbewegung erhält. Denn die Bewegung des Körpers rührt nicht nur von der Wirkung der Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ her, sondern auch von der Wirkung der inneren Kräfte.

Reducirt sich das Kräftesystem $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ auf ein Paar, so ist $R = 0$, daher auch die Invariante $\overline{RK} = 0$. *Die Invariante eines Kräftesystems ist daher in den folgenden drei Fällen gleich Null: 1) wenn die Kräfte im Gleichgewichte sind, 2) wenn sie sich auf eine Einzelkraft reduciren lassen und 3) wenn sie sich auf ein Paar reduciren lassen.*

In jedem dieser Fälle hat man nach den Formeln des Capitels III:

$$\Sigma FF' \left(\frac{F}{F'}\right) = 0, \quad \Sigma(F, F') = 0,$$
$$XL + YM + ZN = 0.$$

Capitel VI.

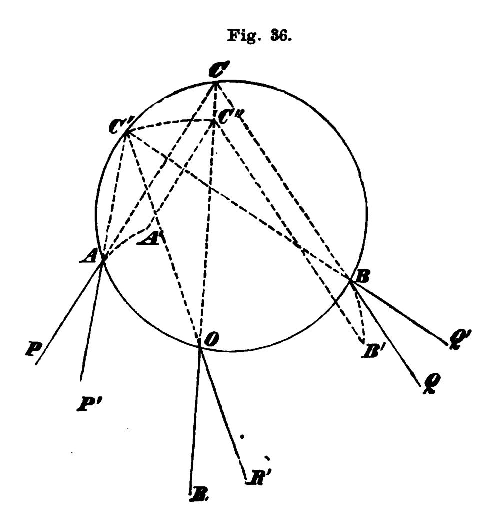
Eigenschaften von Kräften, die sich geometrisch nicht ändern, wenn ihre unveränderlich unter einander verbundenen Angriffspunkte eine beliebige Verschiebung erleiden.

84. Wir haben in § 74 gesehen, dass, wenn an einem unveränderlichen Punktsysteme ein System von Parallelkräften angreift, deren geometrische Summe nicht gleich Null ist, dieses Kräftesystem sich auf eine Einzelkraft reduciren lässt, die man im Mittelpunkte der Kräfte angreifen lassen kann, d. h. im Mittelpunkte von Massen, die gleich den Kräften und in deren Angriffspunkten concentrirt sind. Wenn sich diese Kräfte geometrisch nicht ändern, während das System der Angriffspunkte eine beliebige Verschiebung erleidet, so ändert sich auch die Resultante geometrisch nicht und greift immer noch an demselben Punkte an. Anstatt die Angriffspunkte der Kräfte zu drehen, kann man dieselben unbeweglich lassen und dafür die Kräfte um diese Punkte so drehen, dass alle Kräfte

parallel bleiben, ihre relative Lage und Grösse beibehalten oder ihre Grösse in demselben Verhältnisse ändern. Dabei dreht sich dann die Resultante um einen festen Punkt, der der Mittelpunkt des Kräftesystems ist, bleibt allen Kräften parallel und behält ihre Grösse entweder bei oder ändert sie in demselben Verhältnisse, wie jede einzelne Kraft.

Es giebt aber noch andere Kräftesysteme, die sich in ähnlicher Weise verhalten. Das einfachste derartige System bilden zwei sich schneidende Kräfte. Es seien $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ (Fig. 36) zwei an den festen Punkten A und B angreifende Kräfte, deren Richtungslinien sich in einem Punkte C schneiden. Die Richtungslinie ihrer Resultante $\overline{R}$ geht gleichfalls durch den Punkt C.

Fig. 36.



Dreht man nun die Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ um die Punkte A und B in der Ebene ABC, ohne ihre Grösse und den von ihnen eingeschlossenen Winkel zu ändern, so nehmen sie gewisse Lagen $\overline{P'}$ und $\overline{Q'}$ ein, so dass ihre Richtungslinien sich nunmehr in einem anderen Punkte C', aber unter demselben Winkel $\sphericalangle AC'B = \sphericalangle ACB$ schneiden. Infolge der Gleichheit dieser Winkel liegen die vier Punkte A, B, C und C' auf einem Kreise. Die Resultante $\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$ schneidet diesen Kreis in einem Punkte O, durch welchen auch die Resultante $\overline{R'}$ der Kräfte $\overline{P'}$ und $\overline{Q'}$ gehen muss; denn die Richtungslinie von $\overline{R'}$ muss mit $\overline{P'}$ einen Winkel gleich $\sphericalangle OCA$ bilden. Wenn sich also die Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ um die Punkte A und B drehen, so dreht sich ihre Resultante $\overline{R}$ um den Punkt O; man kann daher den Punkt O den *Mittelpunkt der Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$* nennen.

Denken wir uns nun die Punkte A, C', B, O unveränderlich

unter einander verbunden und derart um den Punkt O gedreht, dass C' in die Gerade OC nach C'' fällt; die Gerade $C'A$ nimmt dann die zu CA parallele Lage $C''A'$, $C'B$ die zu CB parallele Lage $C''B'$ ein; die Kräfte $\overline{P'}$ und $\overline{Q'}$ werden dann dadurch resp. geometrisch gleich den Kräften $\overline{P}$ und $\overline{Q}$.

Man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned} P : Q : R &= \sin(QR) : \sin(RP) : \sin(PQ) \\ &= \sin(BAO) : \sin(ABO) : \sin(AOB) \\ &= OB : OA : AB \end{aligned}$$

ist, woraus sich die Entfernungen des Mittelpunktes O der Kräfte von deren Angriffspunkten A und B ergeben:

$$OA = \frac{Q \,.\, AB}{R}, \quad OB = \frac{P \,.\, AB}{R}; \tag{1}$$

mit Hilfe dieser Abstände lässt sich die Lage des Punktes O bestimmen.

Sind die Kräfte P und Q parallel, so liegt der Punkt O auf der Geraden AB und die Abstände OA und OB sind immer noch durch die Formeln (1) bestimmt.

Bezeichnet man die Abstände der Punkte A, B, O von dem Schnittpunkte C der drei Kräfte mit p, q, r, so hat man nach einer bekannten Eigenschaft des Kreisvierecks:

$$OB \,.\, p + OA \,.\, q = AB \,.\, r;$$

mit Rücksicht auf die Formeln (1) folgt hieraus:

$$r = \frac{Pp + Qq}{R}. \tag{2}$$

Hiermit ist die Lage des Mittelpunktes O auf der Richtungslinie der Resultante bestimmt.

Jedes System von Kräften $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ..., die in einer Ebene liegen und sich auf eine einzige Resultante reduciren lassen, hat einen Mittelpunkt, wovon man sich folgendermassen leicht überzeugen kann. Man zerlegt die Resultante $\overline{R}$ in zwei Componenten $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ und jede einzelne Kraft des Systems in zwei den Componenten $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ parallele Kräfte. Dadurch erhält man zwei Systeme von Parallelkräften: das erste hat eine der Kraft $\overline{P}$ geometrisch gleiche Resultante und einen Mittelpunkt in einem gewissen Punkte A; das zweite hat eine der

Kraft $\overline{Q}$ geometrisch gleiche Resultante und einen Mittelpunkt in einem gewissen Punkte B. Die in den Punkten A und B angreifenden Resultanten $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ der beiden Systeme (p) und (q) behalten diese Angriffspunkte bei und ändern sich geometrisch nicht, wenn die Angriffspunkte aller gegebenen Kräfte, die dabei unveränderlich verbunden zu denken sind, eine beliebige Verschiebung in der Ebene der Kräfte erleiden, sie haben folglich einen Mittelpunkt O. Diesen Punkt kann man als den Mittelpunkt des gegebenen Kräftesystems ansehen; denn die Resultante $\overline{R}$ der beiden in den Punkten A und B angreifenden Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ ist die Resultante der gegebenen Kräfte, und wenn man sie im Punkte O angreifen lässt, so behält sie diesen Angriffspunkt bei, wenn sich die Angriffspunkte der gegebenen Kräfte um O drehen, d. h. um eine durch O senkrecht zur Ebene der Kräfte gelegte Axe. Dagegen hat kein anderer Punkt der Ebene diese Eigenschaft des Punktes O.

Da der Punkt O auf der Richtungslinie der Resultante $\overline{R}$ des gegebenen Kräftesystems liegt, so hat er die in § 72 nachgewiesene Eigenschaft, *dass die algebraische Summe der Producte aller Kräfte in die von O auf sie gefällten Perpendikel gleich Null ist.*

Bezeichnen $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ die vom Punkt O nach den Angriffspunkten der Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ gezogenen Radienvectoren, $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ die Winkel, welche diese Radienvectoren mit den entsprechenden Kräften bilden, so lässt sich die eben erwähnte Eigenschaft des Punktes O durch die Gleichung

$$\Sigma F\varrho \sin\varphi = 0 \qquad (3)$$

ausdrücken. Diese Gleichung muss bei einer Drehung aller Angriffspunkte in der Ebene der Kräfte um O bestehen bleiben. Durch eine solche Drehung erhalten aber alle Winkel $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ ein und dasselbe Increment ω, während $\overline{F}, \overline{F'}, \overline{F''}, \ldots$ und $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ unverändert bleiben; es geht also die Gleichung (3) in die folgende über:

$$\Sigma F\varrho \sin(\varphi + \omega) = 0\,,$$

oder

$$\cos\omega\,\Sigma F\varrho \sin\varphi + \sin\omega\,\Sigma F\varrho \cos\varphi = 0.$$

Hierin ist das erste Glied nach Gleichung (3) gleich Null; es bleibt daher

$$\sin \omega \Sigma F \varrho \cos \varphi = 0\,,$$

und da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von ω gelten soll, so hat man die Bedingung

$$\Sigma F \varrho \cos \varphi = 0\,. \tag{4}$$

Die Gleichung (3) besteht für jeden Punkt O der Richtungslinie der Resultante der gegebenen Kräfte und kann daher als Gleichung dieser Geraden angesehen werden. Die Gleichung (4) lässt sich aus (3) dadurch ableiten, dass man die Winkel $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ durch die Winkel $\varphi + 90^0$, $\varphi' + 90^0$, $\varphi'' + 90^0, \ldots$ ersetzt; wenn man also alle gegebenen Kräfte um ihre Angriffspunkte in der Ebene der Kräfte in demselben Sinne um 90^0 dreht, ohne ihre Grösse zu ändern, so erhält man ein Kräftesystem, dessen Resultante in die Gerade (4) fällt. Man findet also den Mittelpunkt O des gegebenen Kräftesystems als Schnittpunkt der beiden Geraden (3) und (4).

Es seien (x, y), (x', y'), (x'', y''), ... die geradlinigen Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, ... bezüglich irgend welcher rechtwinkliger Axen Ax, Ay in der Ebene der Kräfte; (X, Y), (X', Y'), (X'', Y''), ... die Projectionen der Kräfte auf diese Axen; a, b die Coordinaten des Mittelpunktes O. Nach den Gleichungen (3) und (4) hat man dann:

$$\Sigma[(x-a)Y-(y-b)X]=0\,,\quad \Sigma[(x-a)X+(y-b)Y]=0,$$

oder

$$a\Sigma Y - b\,\Sigma X = \Sigma(xY - yX),$$
$$a\Sigma X + b\Sigma Y = \Sigma(xX + yY).$$

Hieraus findet man für die Coordinaten des Mittelpunktes O:

$$a = \frac{\Sigma(xY - yX)\,.\,\Sigma Y + \Sigma(xX + yY)\,.\,\Sigma X}{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2}\,,$$
$$b = \frac{\Sigma(xX + yY)\,.\,\Sigma Y - \Sigma(xY - yX)\,.\,\Sigma X}{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2}\,. \tag{5}$$

Hierin ist $\Sigma(xY - yX)$ das Hauptmoment der gegebenen Kräfte bezüglich des Coordinatenursprungs und $\Sigma(xX + yY)$ das Hauptmoment der um 90^0 um ihre Angriffspunkte gedrehten Kräfte für denselben Ursprung A.

Ebenso wie Kräfte, die in einer Ebene liegen, lassen sich auch Kräfte, die einer Ebene (π) parallel sind und deren Hauptvector $\overline{R}$ nicht gleich Null ist, durch zwei Systeme von Parallelkräften (p) und (q) von der Art ersetzen, dass deren Resultanten resp. gleich zwei beliebigen Componenten $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ des Vectors $\overline{R}$ sind; dabei können $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ so gewählt werden, dass sie verschiedene Richtungslinien haben und in zwei, mit den Angriffspunkten der gegebenen Kräfte unveränderlich verbundenen Punkten A und B angreifen. Ist die Gerade AB der Ebene (π) parallel, so schneiden sich die Resultanten der Kräfte (p) und (q) und lassen sich daher zu einer einzigen Kraft zusammensetzen, die die Resultante aller gegebenen Kräfte ist. Sie haben einen Mittelpunkt O, in dem man ihre Resultante angreifen lassen kann. Bei einer Drehung des Systems der unveränderlich verbunden gedachten Angriffspunkte aller Kräfte um eine durch O gehende, zu der Ebene (π) senkrechte Axe behalten die gegebenen Kräfte dieselbe Resultante mit demselben Angriffspunkte O bei.

Ist aber die Gerade AB der Ebene (π) nicht parallel, so haben die gegebenen Kräfte keine Einzelresultante und keinen Mittelpunkt O.

Jedenfalls hat übrigens die Gerade AB, sowohl für Kräfte, die in einer Ebene liegen, als auch für solche, die einer Ebene (π) parallel sind, die Eigenschaft, dass bei einer Drehung des Systems der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte um sie diese Kräfte zwei Kräften äquivalent bleiben, die in den Punkten A und B angreifen und sich nicht geometrisch ändern. Infolge dieser Eigenschaft, die der Eigenschaft des Mittelpunktes paralleler oder in einer Ebene liegender Kräfte ähnlich ist, nennt Minding diese Gerade AB die *Centralaxe.**)

Die Lage der Centrallinie bezüglich des Systems der Angriffspunkte der Kräfte ist von der Art der Zerlegung der Kräfte in zwei Gruppen von Parallelkräften (p) und (q) unabhängig.

Es ist leicht nachzuweisen, dass auf der Geraden AB

---

*) Möbius nennt sie die *Centrallinie*, s. „Lehrbuch der Statik“, 1. Th., § 145 (S. 281).

der Mittelpunkt derjenigen Parallelkräfte liegt, die man durch Projiciren der gegebenen Kräfte auf Gerade erhält, welche durch die Angriffspunkte dieser Kräfte parallel zu irgend einer gegebenen Geraden (l) gezogen werden können; dabei können die projicirenden Ebenen orthogonal oder geneigt, d. h. zu einer beliebigen Ebene parallel sein. In der That, diese neuen Kräfte bestehen aus zwei Gruppen, nämlich aus den Projectionen (p_1) der Kräfte (p) und aus den Projectionen (q_1) der Kräfte (q). Da die Kräfte (p_1) den entsprechenden Kräften (p) proportional sind, so haben sie ihren Mittelpunkt in A; aus demselben Grunde haben die Kräfte (q_1) ihren Mittelpunkt in B. Die beiden Gruppen (p_1) und (q_1) bilden nun zusammen ein System von Kräften, die zu (l) parallel sind und deren Mittelpunkt auf derselben Geraden liegen muss, wie die Mittelpunkte der beiden einzeln genommenen Gruppen, d. h. auf der Geraden AB.

Wählt man für (l) den Hauptvector $\overline{R}$, so ergiebt sich als Mittelpunkt des betreffenden Systems von Parallelkräften ein Punkt, den man *den Centralpunkt der Centrallinie* nennt.*)

85. Jedes an einem unveränderlichen Punktsysteme angreifende Kräftesystem $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ lässt sich, wenn sein Hauptvector $\overline{R}$ nicht gleich Null ist, auf verschiedene Weise auf drei Kräfte derart reduciren, dass sich diese drei Kräfte bei irgend einer Verschiebung des Systems der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte nicht geometrisch ändern und dass ihre Angriffspunkte ihre Lage bezüglich der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte beibehalten. Um dies zu zeigen, zerlegt man den Hauptvector $\overline{R}$ in drei Componenten $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{S}$ längs den Kanten einer beliebigen dreikantigen Ecke und jede der gegebenen Kräfte $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ in drei, diesen Kanten parallele Kräfte. Man erhält dadurch drei Systeme von Parallelkräften (p), (q), (s), deren Resultanten resp. geometrisch gleich $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{S}$ sind und deren Mittelpunkte in gewisse drei Punkte A, B, C fallen. Lässt man die drei Resultanten in den entsprechenden Mittelpunkten A, B, C angreifen, so hat man in

*) Möbius: „Lehrbuch der Statik", 1. Th., § 146 (S. 282).

ihnen drei Kräfte $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{S}$, die sich geometrisch nicht ändern und ihre mit den Angriffspunkten der gegebenen Kräfte unveränderlich verbundenen Angriffspunkte A, B, C beibehalten, wenn die Angriffspunkte der Kräfte eine beliebige Verschiebung erhalten.

Liegen die Punkte A, B, C nicht auf derselben Geraden, so lässt sich durch sie eine bestimmte Ebene legen, die mit den Angriffspunkten der Kräfte unveränderlich verbunden ist. Diese Ebene nennt man die *Centralebene.* Ihre Lage hängt von der Art der Zerlegung des Hauptvectors $\overline{R}$ in drei Componenten $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{S}$ nicht ab, da sie den Mittelpunkt jedes Systems von Parallelkräften enthält, welches man durch Projiciren der gegebenen Kräfte auf Gerade, die durch die Angriffspunkte parallel einer beliebigen gegebenen Geraden (l) gezogen sind, erhält; dabei können die projicirenden Ebenen jeder beliebigen gegebenen Ebene parallel sein. Ein solches System von Parallelkräften, das wir mit (l) bezeichnen wollen, besteht nämlich aus drei Systemen (p_1), (q_1), (s_1), die von den Projectionen der Kräfte jedes der drei Systeme von Parallelkräften (p), (q), (s) gebildet werden. Da aber die Kräfte des Systems (p_1) denen von (p) proportional sind, so ist A der Mittelpunkt von (p_1); aus dem analogen Grunde ist B der Mittelpunkt von (q_1) und C der von (s_1). Daher muss der Mittelpunkt des aus den Systemen (p_1), (q_1), (s_1) zusammengesetzten Systemes (l) in der Ebene der Punkte A, B, C liegen.

Liegen dagegen die Punkte A, B, C in einer Geraden, so muss auch der Mittelpunkt des Systems (l) auf dieser Geraden liegen. In diesem Falle ist die Gerade AB die Centrallinie.

Fallen endlich die drei Punkte A, B, C in einen einzigen Punkt O zusammen, so ist dieser Punkt selbst der Mittelpunkt des Systems (l).

Wir wollen nun die Gleichung der Centralebene ableiten, indem wir annehmen, es seien A, B, C die Mittelpunkte der drei Kraftsysteme

$$(X, X', \ldots), (Y, Y', \ldots), (Z, Z', \ldots),$$

die man durch Zerlegung des gegebenen Kräftesystems $\overline{F}, \overline{F'}, \ldots$ nach Richtungen parallel den Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz erhält; auf dieselben Axen seien auch die Angriffspunkte der Kräfte bezogen und seien ihre Coordinaten resp.:

$$(x, y, z), (x', y', z'), \ldots$$

Die Resultanten der drei Systeme von Parallelkräften sind gleich den Summen ΣX, ΣY, ΣZ und durch Strecken parallel den Axen Ox, Oy, Oz dargestellt.

Bildet man nun die neun Summen

$$\begin{aligned} \Sigma xX &= a_{11}, \quad \Sigma xY = a_{12}, \quad \Sigma xZ = a_{13}, \\ \Sigma yX &= a_{21}, \quad \Sigma yY = a_{22}, \quad \Sigma yZ = a_{23}, \\ \Sigma zX &= a_{31}, \quad \Sigma zY = a_{32}, \quad \Sigma zZ = a_{33} \end{aligned} \tag{6}$$

und bezeichnet die Coordinaten der Punkte A, B, C resp. mit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, so findet man auf Grund der Formeln (5) § 73, S. 331:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_{11}}{\Sigma X}, \quad \alpha_2 = \frac{a_{21}}{\Sigma X}, \quad \alpha_3 = \frac{a_{31}}{\Sigma X}, \\ \beta_1 &= \frac{a_{12}}{\Sigma Y}, \quad \beta_2 = \frac{a_{22}}{\Sigma Y}, \quad \beta_3 = \frac{a_{32}}{\Sigma Y}, \\ \gamma_1 &= \frac{a_{13}}{\Sigma Z}, \quad \gamma_2 = \frac{a_{23}}{\Sigma Z}, \quad \gamma_3 = \frac{a_{33}}{\Sigma Z}. \end{aligned} \tag{7}$$

Sind ferner x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der durch die Punkte A, B, C gehenden Ebene, so ergiebt sich die Gleichung dieser Ebene in der Form:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ y & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ z & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

oder:

$$\begin{vmatrix} 1 & \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Dies ist die Gleichung einer bestimmten Ebene, welche die Centralebene ist, wenn die Unterdeterminanten, die sich durch Differentiation der linken Seite nach den Elementen der ersten Colonne ergeben, nicht gleichzeitig verschwinden.

Wenn aber gleichzeitig

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

ist, so liegen die drei Punkte A, B, C auf einer Geraden. Wenn dabei die drei Punkte A, B, C nicht in einen einzigen zusammenfallen, so existirt eine Centrallinie AB und ihre Gleichungen lassen sich in folgender Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & \Sigma Y & \Sigma Z \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & \Sigma X & \Sigma Z \\ x & a_{11} & a_{13} \\ z & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Endlich hat das Kräftesystem einen Mittelpunkt, wenn die Punkte A, B, C in einen Punkt C zusammenfallen, was durch die Proportionalitäten

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23}$$
$$= a_{31} : a_{32} : a_{33} = \Sigma X : \Sigma Y : \Sigma Z$$

ausgedrückt ist.

Die erhaltenen Resultate gelten ebensowohl für schiefwinklige wie für rechtwinklige Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz.

86. Minding hat die folgende bemerkenswerthe Eigenschaft der Punkte A, B, C gefunden:

Das Product aus dem Flächeninhalt des Dreiecks ABC und dem Volumen des Parallelepipedons, welches die an den Punkt O verlegten Kräfte ΣX, ΣY, ΣZ zu Kanten hat, ist unabhängig von der Lage dieses Punktes O und von der Richtung der Axen Ox, Oy, Oz.

Um diesen Satz zu beweisen, untersuchen wir unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen Ox, Oy, Oz den Werth der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dieselbe lässt sich nach dem Multiplicationsgesetz der Deter-

minanten als eine Summe von Producten aus Determinanten dritten Grades darstellen; die Glieder dieser Summe erhält man, indem man alle aus irgend drei Colonnen des Schemas

$$\begin{vmatrix} X, & X', & X'',\ldots \\ Y, & Y', & Y'',\ldots \\ Z, & Z', & Z'',\ldots \end{vmatrix}$$

gebildeten Determinanten mit den entsprechenden, aus dem Schema

$$\begin{vmatrix} x, & x', & x'',\ldots \\ y, & y', & y'',\ldots \\ z, & z', & z'',\ldots \end{vmatrix}$$

in derselben Weise abgeleiteten Determinanten dritten Grades multiplicirt, d. h. es ist

$$A = \Sigma \begin{vmatrix} X & X' & X'' \\ Y & Y' & Y'' \\ Z & Z' & Z'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} X & X' & X'' \\ Y & Y' & Y'' \\ Z & Z' & Z'' \end{vmatrix}$$

stellt das Volumen eines Parallelepipedons dar, das die Vectoren VF, VF', VF'' der drei Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$ zu Kanten hat.*) Die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

repräsentirt, mit entsprechendem Vorzeichen genommen, das Volumen des Parallelepipedons, welches die vom Ursprunge O nach den Angriffspunkten M, M', M'' derselben drei Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$ gezogenen Radienvectoren zu Kanten hat. Bezeichnet man nun jenes erste Volumen mit (F, F', F''), den Abstand des Punktes O von der Ebene $MM'M''$ mit δ und giebt man

*) Das Vorzeichen der Determinante bestimmt sich folgendermassen. Wenn ein auf VF' hinschauender Beobachter VF den Vector VF'' nach rechts gerichtet sieht, so ist die Determinante positiv zu nehmen, dagegen negativ, wenn nach links.

diesem Abstand das + oder — Vorzeichen, je nachdem das Product der beiden Determinanten + oder — ist, so kann man schreiben:

$$A = 6\,\Sigma\,(F, F', F'') \,.\, MM'M'' \,.\, \delta. \tag{10}$$

Es sei nun jede der gegebenen Kräfte in drei Componenten parallel den Kanten einer beliebigen körperlichen Ecke zerlegt. Dadurch erhält man drei Systeme von Parallelkräften (p), (q), (s), deren Resultanten $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{S}$ in drei in der Centralebene (9) liegenden Punkten A', B', C' angreifen. Bedeuten

$$(P_1, P_2, P_3),\ (Q_1, Q_2, Q_3),\ (S_1, S_2, S_3)$$

die Projectionen der Kräfte $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{S}$ auf die rechtwinklingen Axen und

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3),\ (\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3),\ (\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$$

die Coordinaten der Punkte A', B', C', so hat man:

$$P_1 + Q_1 + S_1 = \Sigma X,\ P_2 + Q_2 + S_2 = \Sigma Y,\ P_3 + Q_3 + S_3 = \Sigma Z,$$
$$\alpha'_1 P_1 + \beta'_1 Q_1 + \gamma'_1 S_1 = a_{11},$$
$$\alpha'_1 P_2 + \beta'_1 Q_2 + \gamma'_1 S_2 = a_{12},\ \alpha'_1 P_3 + \beta'_1 Q_3 + \gamma'_1 S_3 = a_{13},$$
$$\alpha'_2 P_1 + \beta'_2 Q_1 + \gamma'_2 S_1 = a_{21},$$
$$\alpha'_2 P_2 + \beta'_2 Q_2 + \gamma'_2 S_2 = a_{22},\ \alpha'_2 P_3 + \beta'_2 Q_3 + \gamma'_2 S_3 = a_{23},$$
$$\alpha'_3 P_1 + \beta'_3 Q_1 + \gamma'_3 S_1 = a_{31},$$
$$\alpha'_3 P_2 + \beta'_3 Q_2 + \gamma'_3 S_2 = a_{32},\ \alpha'_3 P_3 + \beta'_3 Q_3 + \gamma'_3 S_3 = a_{33}.$$

Die Determinante A hat daher denselben Werth sowohl für das gegebene Kräftesystem, als auch für die drei in den Punkten A', B', C' angreifenden Kräfte P, Q, S; folglich ist

$$A = 6\,(P, Q, S) \,.\, A'B'C' \,.\, D,$$

wenn D den Abstand des Punktes O von der Centralebene (9) bedeutet. Durch Vergleichung dieses Ausdruckes von A mit (10) ergiebt sich:

$$(P, Q, S) \,.\, A'B'C' \,.\, D = \Sigma (F, F', F'') \,.\, MM'M'' \,.\, \delta.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist von den Richtungen der Kanten des Parallelepipedons (P, Q, S) unabhängig, folglich auch die linke. Dividirt man beiderseits mit D, so erhält man die Grösse $(P, Q, S) \,.\, A'B'C'$, die nicht nur von den Richtungen der Kanten des Parallelepipedons, sondern auch von

der Lage des Punktes O unabhängig ist. Hierin besteht aber der Satz von Minding.*)

Für jeden in der Centralebene gelegenen Punkt O ist $D = 0$, also

$$\Sigma (F, F', F'') . MM'M'' . \delta = 0;$$

dies kann man als Gleichung der Centralebene ansehen.

87. Wählt man den Coordinatenursprung O in der Centralebene und die Axe Ox in der Richtung des Hauptvectors $\overline{R}$, so ist

$$\Sigma X = R, \ \Sigma Y = 0, \ \Sigma Z = 0,$$
$$a_{11} = 0, \ a_{21} = 0, \ a_{31} = 0,$$

so dass die Gleichung der Centralebene in die folgende übergeht:

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

In diesem Falle sind die Mittelpunkte der beiden Systeme von Parallelkräften $(Y, Y', \ldots)$ und $(Z, Z', \ldots)$ unendlich entfernt von O; daher ist die Centralebene den Armen der beiden Paare parallel, auf die sich jene zwei Kräftesysteme reduciren.

Die beiden Kräftesysteme lassen sich aber auch durch zwei andere, den Axen Oy und Oz parallele Systeme ersetzen, deren Mittelpunkte in der Centralebene in endlicher Entfernung von dem Centralpunkte O liegen.

Zu diesem Zwecke lassen wir im Punkte O längs der Axe Oy zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\overline{R'}$ und $-\overline{R'}$ wirken und längs Oz ebenfalls zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\overline{R''}$ und $-\overline{R''}$. Diese Hinzufügung von neuen Kräften zu dem ganzen Systeme der gegebenen Kräfte ändert offenbar dessen Wirkung nicht, welches auch die Lage des Systems der Angriffspunkte sein mag; dagegen erhält man hierdurch die Möglichkeit, das ganze Kräftesystem auf drei Kräfte zu reduciren, deren Angriffspunkte mit den Angriffspunkten der gegebenen Kräfte unveränderlich verbunden sind, nämlich: 1)

---

*) Minding selbst giebt einen anderen Beweis in Crelle's Journ. Bd. 15 (1836), S. 30.

die Kraft $\overline{R} - \overline{R'} - \overline{R''}$, die im Punkte O angreift, 2) die Resultante $\overline{R'}$ der Parallelkräfte $Y, Y', \ldots R'$, deren Angriffspunkt der Mittelpunkt dieser Kräfte ist, 3) die Resultante $\overline{R''}$ der Parallelkräfte $Z, Z', \ldots R''$, die in deren Mittelpunkte angreift. Dabei ist die zweite Resultante deshalb gleich der Kraft R', weil $\Sigma Y = 0$, und die dritte gleich R'', weil $\Sigma Z = 0$ ist.

Die Angriffspunkte A und B dieser beiden Kräfte, d. h. die Mittelpunkte der beiden erwähnten Systeme von Parallelkräften liegen, wie leicht zu sehen, in der Centralebene. Die Coordinaten des Punktes A sind nämlich

$$\alpha_1 = \frac{a_{12}}{R'}, \quad \alpha_2 = \frac{a_{22}}{R'}, \quad \alpha_3 = \frac{a_{32}}{R'},$$

und die des Punktes B

$$\beta_1 = \frac{a_{13}}{R''}, \quad \beta_2 = \frac{a_{23}}{R''}, \quad \beta_3 = \frac{a_{33}}{R''};$$

die ersteren wie die letzteren genügen aber der Gleichung (11) der Centralebene.

Die Lage der Centralebene lässt sich daher durch die drei Punkte O, A, B bestimmen.

Minding hat gezeigt, dass man die Richtungen der Axen Oy und Oz so wählen kann, dass die Geraden OA und OB zu einander rechtwinklig werden.

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, die Axen Ox, Oy, Oz seien rechtwinklig und werden mit einem anderen, gleichfalls rechtwinkligen Axensystem Ox, Oy_1, Oz_1 vertauscht; dabei sei $\sphericalangle\, y_1 O y = \alpha$. Es seien nun A_1 und B_1 die den Axen Oy_1 und Oz_1 entsprechenden Lagen der Punkte A und B, d. h. es sei A_1 der Mittelpunkt der der Axe Oy parallelen Kräfte

$$Y \cos\alpha + Z \sin\alpha, \quad Y' \cos\alpha + Z' \sin\alpha, \ldots$$

und ebenso B_1 der Mittelpunkt der der Axe Oz_1 parallelen Kräfte

$$-Y \sin\alpha + Z \cos\alpha, \quad -Y' \sin\alpha + Z' \cos\alpha, \ldots$$

Nach den allgemeinen Formeln für die Coordinaten des Mittelpunktes paralleler Kräfte findet man als Coordinaten des Punktes A in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz

$$\alpha'_1 = \frac{a'_{12}}{R'}, \quad \alpha'_2 = \frac{a'_{22}}{R'}, \quad \alpha'_3 = \frac{a'_{32}}{R'},$$

mit

$$\begin{aligned} a'_{12} &= a_{12}\cos\alpha + a_{13}\sin\alpha, \\ a'_{22} &= a_{22}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha, \\ a'_{32} &= a_{32}\cos\alpha + a_{33}\sin\alpha, \end{aligned} \tag{12}$$

und für die Coordinaten von B

$$\beta'_1 = \frac{a'_{13}}{R''},\ \beta'_2 = \frac{a'_{23}}{R''},\ \beta'_3 = \frac{a'_{33}}{R''},$$

mit

$$\begin{aligned} a'_{13} &= -a_{12}\sin\alpha + a_{13}\cos\alpha, \\ a'_{23} &= -a_{22}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha, \\ a'_{33} &= -a_{32}\sin\alpha + a_{33}\cos\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Bedingung, dass der Winkel $A_1 O B_1$ ein rechter sei, ist durch die Gleichung

$$a'_{12}a'_{13} + a'_{22}a'_{23} + a'_{32}a'_{33} = 0$$

ausgedrückt, welche infolge der Formeln (12) und (13) in die folgende übergeht:

$$(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33})\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2 - a_{33}^2)\sin 2\alpha = 0.$$

Diese Gleichung liefert für $\tan 2\alpha$ immer einen reellen Werth, aus dem für α zwei um 90^0 verschiedene Werthe folgen. Es giebt daher in der durch den Centralpunkt O senkrecht zu dem Hauptvector R gelegten Ebene immer zwei und nur zwei Gerade von der Eigenschaft, dass, wenn man sie als Axen Oy_1 und Oz_1 betrachtet, der Winkel $A_1 O B_1$ ein rechter wird. Es ist dabei beachtenswerth, dass die Richtungen dieser Geraden von der Grösse der Kräfte R' und R'' ganz unabhängig sind.

Die beiden durch diese Geraden mit dem Hauptvector R bestimmten Ebenen nennt Minding *Mittelebenen.*

Setzt man $R' = 1$ und $R'' = 1$, so wird:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = a_{12},\ \alpha_2 = a_{22},\ \alpha_3 = a_{32}, \\ \beta_1 = a_{13},\ \beta_2 = a_{23},\ \beta_3 = a_{33}, \\ \alpha'_1 = a'_{12},\ \alpha'_2 = a'_{22},\ \alpha'_3 = a'_{32}, \\ \beta'_1 = a'_{13},\ \beta'_2 = a'_{23},\ \beta'_3 = a'_{33}. \end{gathered}$$

Durch Elimination der Grössen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ aus den Gleichungen (12) erhält man die Gleichung

$$(a_{32}a'_{22} - a_{22}a'_{32})^2 + (a_{33}a'_{22} - a_{23}a'_{32})^2 = (a_{32}a_{22} - a_{23}a_{33})^2,$$

welche zeigt, dass die Coordinaten des Punktes A_1 der Gleichung

$$(a_{32}y - a_{22}z)^2 + (a_{33}y - a_{23}z)^2 = (a_{33}a_{22} - a_{23}a_{33})^2 \quad (14)$$

eines elliptischen Cylinders genügen. Der Punkt A_1 liegt daher auf der Ellipse, längs welcher dieser Cylinder von der Centralebene (11) geschnitten wird. Dieselbe Gleichung erfüllen aber auch die Coordinaten der Punkte A, B, B_1; es liegen also alle die vier Punkte A, B, A_1, B_1 auf einer und derselben Ellipse, deren Mittelpunkt in O ist. Auch sieht man leicht, dass die Geraden OA und OB conjugirte Diameter jener Ellipse sind, OA_1 und OB_1 aber die Hauptdiameter.

88. Um weitere Eigenschaften solcher Kräfte zu finden, die sich, wenn sie an einem unveränderlichen Punktsystem angreifen, bei einer Verschiebung desselben geometrisch nicht ändern, wollen wir die beiden folgenden Hauptaufgaben lösen:

1) *Das Hauptmoment der Kräfte nach einer beliebigen Verschiebung des Systems der Angriffspunkte* (das wir der Kürze halber einfach *Körper* nennen wollen) *zu bestimmen;*

2) *Eine Verschiebung des Körpers zu finden, nach welcher das Hauptmoment gewissen gegebenen Bedingungen genügt.*

Vom Hauptvector $\overline{R}$ ist hier nicht die Rede, da er sich bei keiner Verschiebung des Körpers geometrisch ändert. Ebenso bleibt das einem beliebigen Ursprunge O entsprechende Hauptmoment $\overline{K}$ unverändert, wenn der Körper eine Translationsverschiebung erleidet und der Ursprung O dabei unveränderlich mit dem Körper verbunden bleibt. Das Hauptmoment $\overline{K}$ kann sich daher nur infolge einer Rotationsverschiebung oder einer aus Rotationen und Translationen zusammengesetzten Verschiebung ändern. Da aber die Translationsverschiebung das Hauptmoment $\overline{K}$ nicht ändert, so genügt es, Rotationsverschiebungen des Körpers um den Ursprung O der Momente zu betrachten.

89. Es seien (x, y, z), (x', y', z'), ... die Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem Ox, Oy, Oz; (X, Y, Z), (X', Y', Z'), ... die Projectionen der Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$, ... und L, M, N die des Haupt-

momentes $\overline{K}$ auf jene Axen. Nach den Formeln des § 65 hat man dann:

$$L = \Sigma(yZ - zY),\ M = \Sigma(zX - xZ),\ N = \Sigma(xY - yX). \quad (15)$$

Bestimmen wir nun die Incremente dieser Grössen, die sich infolge einer beliebigen endlichen Rotationsverschiebung des Körpers um den Punkt O ergeben.

Jede solche Verschiebung lässt sich, wie in den §§ 168 und 170 der Kinematik gezeigt wurde, durch eine Rotation des Körpers um eine gewisse Axe OA um einen gewissen Winkel φ hervorbringen. Die Lage dieser Axen und die Grösse des Winkels φ bestimmen sich mit Hilfe dreier Grössen λ, μ, ν, welche die Projectionen der auf der Axe der Verschiebung in bekannter Weise aufzutragenden Strecke $OA = \tan\frac{\varphi}{2} = \Omega$ auf die Axen Ox, Oy, Oz sind.

Setzt man nun voraus, dass die Axen Ox, Oy, Oz im Raume fest bleiben und dass die Coordinaten x, y, z nach der Verschiebung des Körpers die Incremente $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ erhalten, so lassen sich diese letzteren mit Hilfe der Formeln (8) § 171 der Kinematik (S. 365) als Functionen der Coordinaten x, y, z ausdrücken, nämlich:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{2}{h}\left[-(\mu^2 + \nu^2)x + (\lambda\mu - \nu)y + (\lambda\nu + \mu)z\right], \\
\Delta y &= \frac{2}{h}\left[(\lambda\mu + \nu)x - (\lambda^2 + \nu^2)y + (\mu\nu - \lambda)z\right], \qquad (16) \\
\Delta z &= \frac{2}{h}\left[(\lambda\nu - \mu)x + (\mu\nu + \lambda)y - (\lambda^2 + \mu^2)z\right],
\end{aligned}$$

mit

$$h = \begin{vmatrix} 1, & \nu, & -\mu \\ -\nu, & 1, & \lambda \\ \mu, & -\lambda, & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 + \Omega^2 = \sec^2\frac{\varphi}{2}.$$

Die Grössen L, M, N erhalten die Incremente

$$\begin{aligned}
\Delta L &= \Sigma Z\Delta y - \Sigma Y\Delta z, \\
\Delta M &= \Sigma X\Delta z - \Sigma Z\Delta x, \\
\Delta N &= \Sigma Y\Delta x - \Sigma X\Delta y,
\end{aligned}$$

welche sich auf Grund der Formeln (16) folgendermassen ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned}
\Delta L &= \frac{2}{h}\,[(\lambda\mu+\nu)\,\Sigma xZ-(\lambda^2+\nu^2)\,\Sigma yZ+(\mu\nu-\lambda)\,\Sigma zZ \\
&\quad -(\lambda\nu-\mu)\,\Sigma xY-(\mu\nu+\lambda)\,\Sigma yY+(\lambda^2+\mu^2)\,\Sigma zY], \\
\Delta M &= \frac{2}{h}\,[(\mu\nu+\lambda)\,\Sigma yX-(\mu^2+\lambda^2)\,\Sigma zX+(\nu\lambda-\mu)\,\Sigma xX \\
&\quad -(\mu\lambda-\nu)\,\Sigma yZ-(\nu\lambda+\mu)\,\Sigma zZ+(\mu^2+\nu^2)\,\Sigma xZ], \\
\Delta N &= \frac{2}{h}\,[(\nu\lambda+\mu)\,\Sigma zY-(\nu^2+\mu^2)\,\Sigma xY+(\lambda\mu-\nu)\,\Sigma yY \\
&\quad -(\nu\mu-\lambda)\,\Sigma zX-(\lambda\mu+\nu)\,\Sigma xX+(\nu^2+\lambda^2)\,\Sigma yX].
\end{aligned} \tag{17}$$

Führt man die abkürzenden Bezeichnungen (6) (S. 363) ein und setzt ausserdem

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a,\text{*)}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
& L=a_{23}-a_{32},\quad M=a_{31}-a_{13},\quad N=a_{12}-a_{21}; \\
\Delta L &= \frac{2}{h}\,[-L\,(\lambda^2+\mu^2)+a_{23}\,(\mu^2-\nu^2)+a_{13}\,(\lambda\mu+\nu) \\
&\quad -a_{12}\,(\lambda\nu-\mu)+(a_{33}-a_{22})\,\mu\nu+(a_{11}-a)\,\lambda], \\
\Delta M &= \frac{2}{h}\,[-M\,(\mu^2+\nu^2)+a_{31}\,(\nu^2-\lambda^2)+a_{21}\,(\mu\nu+\lambda) \\
&\quad -a_{23}\,(\mu\lambda-\nu)+(a_{11}-a_{13})\,\nu\lambda+(a_{22}-a)\,\mu], \\
\Delta N &= \frac{2}{h}\,[-N\,(\nu^2+\lambda^2)+a_{12}\,(\lambda^2-\mu^2)+a_{32}\,(\nu\lambda+\mu) \\
&\quad -a_{31}\,(\nu\mu-\lambda)+(a_{22}-a_{11})\,\lambda\mu+(a_{33}-a)\,\nu].
\end{aligned} \tag{18}$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
a_{11}\lambda+a_{12}\mu+a_{13}\nu &= \alpha, \\
a_{21}\lambda+a_{22}\mu+a_{23}\nu &= \beta, \\
a_{31}\lambda+a_{32}\mu+a_{33}\nu &= \gamma,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$L\lambda+M\mu+N\nu=\delta, \tag{20}$$

so lassen sich die Gleichungen (17) einfacher schreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{h}{2}\,\Delta L &= \alpha+\mu\gamma-\nu\beta-\lambda\,(\delta+a), \\
\frac{h}{2}\,\Delta M &= \beta+\nu\alpha-\lambda\gamma-\mu\,(\delta+a), \\
\frac{h}{2}\,\Delta N &= \gamma+\lambda\beta-\mu\alpha-\nu\,(\delta+a).
\end{aligned} \tag{21}$$

---

*) Dabei ist zu bemerken, dass $a=\Sigma(Yx+Yy+Zz)$ das Potential der gegebenen Kräfte ist, wobei $X, Y, Z, X', \ldots$ als constante Grössen zu betrachten sind.

Diese Gleichungen werden die Grundlage zur Beantwortung der beiden oben gestellten Probleme bilden.

90. Gehen wir nun dazu über, *das Hauptmoment der Kräfte nach einer Verschiebung des Körpers zu bestimmen.*

Kennt man die ursprüngliche Lage des Körpers und der Kräfte, so kann man die Hilfsgrössen (6) bestimmen; ferner sind aus der gegebenen Verschiebung des Körpers die Grössen λ, μ, ν, h bekannt; hiermit findet man mit Hilfe der Formeln (19) und (20) die Hilfsgrössen α, β, γ, δ und endlich ergeben sich aus den Gleichungen (21) die Grössen ΔL, ΔM ΔN, die zur Bestimmung der Projectionen

$$L + \Delta L, \quad M + \Delta M, \quad N + \Delta N$$

des neuen Hauptvectors

$$\overline{K'} = \overline{K} + \overline{\Delta K}$$

auf die Coordinatenaxen dienen.

Die Hilfsgrössen α, β, γ, δ haben eine bemerkenswerthe geometrische Bedeutung, die man zur Construction des neuen Hauptmoments $\overline{K'}$ benutzen kann.

Da $\frac{\lambda}{\Omega}$, $\frac{\mu}{\Omega}$, $\frac{\nu}{\Omega}$ die Cosinus der von der Verschiebungsaxe OA mit den Coordinatenaxen gebildeten Winkel sind, so ist

$$\frac{1}{\Omega}(\lambda X + \mu Y + \nu Z)$$

die Projection der Kraft $\overline{F}$ auf OA. Zerlegt man also jede der gegebenen Kräfte in eine der Axe OA parallele und eine dazu senkrechte Componente, so sind

$$\frac{\alpha}{\Omega}, \frac{\beta}{\Omega}, \frac{\gamma}{\Omega} \tag{22}$$

die Momente des von den ersteren Componenten gebildeten Systems von Parallelkräften in Bezug auf die Ebenen yOz, zOx, xOy.

Ist die Summe

$$\frac{1}{\Omega}\Sigma(\lambda X + \mu Y + \nu Z) = R\cos(R\Omega)$$

nicht gleich Null, so hat dieses System von Parallelkräften einen Mittelpunkt, und bezeichnet man dessen Coordinaten mit α', β', γ', so ist:

$$\alpha = \alpha' R \cos(R\Omega),$$
$$\beta = \beta' R \cos(R\Omega),$$
$$\gamma = \gamma' R \cos(R\Omega).$$

Im Falle $R \cos(R\Omega) = 0$, reducirt sich dieses System von der Geraden Ω parallelen Kräften entweder auf ein Paar oder es ist im Gleichgewichte; es hat dann keinen Mittelpunkt.

In beiden Fällen lassen sich die Grössen (22) als Projectionen einer gewissen Strecke $\overline{k}$ auf die Coordinatenaxen betrachten, so dass

$$\alpha = \Omega k \cos(kx), \quad \beta = \Omega k \cos(ky), \quad \gamma = \Omega k \cos(kz) \tag{23}$$

die Projectionen der auf der Richtung von $\overline{k}$ aufzutragenden Strecke $k \tan \frac{\varphi}{2}$ auf die Coordinatenaxen sind.

Wenn man im Falle der Existenz eines Mittelpunktes $(\alpha', \beta', \gamma')$ der der Axe $\overline{\Omega}$ parallelen Kräfte den vom Ursprunge O nach diesem Mittelpunkte gezogenen Radiusvector mit ϱ bezeichnet, so ist

$$\Omega k = \varrho R \cos(R\Omega);$$

dabei sind $\overline{k}$ und $\overline{\varrho}$ längs derselben Geraden in demselben Sinne gerichtet, wenn $R \cos(R\Omega) > 0$, und in entgegengesetztem Sinne, wenn $R \cos(R\Omega) < 0$ ist.

Die Determinanten

$$\frac{1}{\Omega}(\mu\gamma - \nu\beta), \; \frac{1}{\Omega}(\nu\alpha - \lambda\gamma), \; \frac{1}{\Omega}(\lambda\beta - \mu\alpha)$$

repräsentiren die Projectionen des linearen Hauptmoments des betrachteten Systems von Parallelkräften auf die Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz; bezeichnet man also dieses Moment mit $\overline{l}$, so ist:

$$\begin{aligned} \mu\gamma - \nu\beta &= \Omega l \cos(lx), \\ \nu\alpha - \lambda\gamma &= \Omega l \cos(ly), \\ \lambda\beta - \mu\alpha &= \Omega l \cos(lz). \end{aligned} \tag{24}$$

Die Formel (20), die man auch schreiben kann

$$\delta = \Omega K \cos(K\Omega),$$

zeigt, dass $\frac{\delta}{\Omega}$ die Projection des ursprünglichen Hauptmoments

$\overline{K}$ auf die Verschiebungsaxe $\overline{\Omega}$ ist. Multiplicirt man diese Projection mit $\tan\frac{\varphi}{2}$, so erhält man die Grösse δ.

Bezeichnet ferner $\overline{m}$ eine auf der Axe OA im entgegengesetzten Sinne von $\overline{\Omega}$ aufgetragene Strecke gleich $\delta + a$, so ist

$$\begin{aligned} -\lambda(\delta + a) &= \Omega m \cos(mx), \\ -\mu(\delta + a) &= \Omega m \cos(my), \\ -\nu(\delta + a) &= \Omega m \cos(mz). \end{aligned} \tag{25}$$

Endlich ergiebt sich aus den Gleichungen (23), (24), (25) und (21):

$$\begin{aligned} \varDelta L &= \sin\frac{\varphi}{2}\,[k\cos(kx) + l\cos(lx) + m\cos(mx)], \\ \varDelta M &= \sin\frac{\varphi}{2}\,[k\cos(ky) + l\cos(ly) + m\cos(my)], \\ \varDelta N &= \sin\frac{\varphi}{2}\,[k\cos(kz) + l\cos(lz) + m\cos(mz)]. \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen, dass man die Grössen $\varDelta L$, $\varDelta M$, $\varDelta N$ erhält, wenn man eine Strecke, die geometrisch gleich $\overline{k}+\overline{l}+\overline{m}$, multiplicirt mit $\sin\frac{\varphi}{2}$ ohne Aenderung ihrer Richtung, ist, auf die Coordinatenaxen projicirt. Um also die geometrische Differenz $\overline{K'} - \overline{K}$ zu construiren, hat man mit Hilfe der gegebenen Grössen $a_{r,s}$ und λ, μ, ν die Strecken $\overline{k}$, $\overline{l}$, $\overline{m}$ und ihre geometrische Summe $\overline{k} + \overline{l} + \overline{m}$ zu bestimmen und diese, ohne ihre Richtung zu ändern, im Verhältniss $\sin\frac{\varphi}{2} : 1$ zu verkleinern. Addirt man dann geometrisch zu der so gefundenen Strecke $\overline{K'} - \overline{K}$ das ursprüngliche Moment $\overline{K}$, so erhält man das neue Hauptmoment $\overline{K'}$.

91. Betrachten wir jetzt das umgekehrte Problem: *eine derartige Verschiebung zu bestimmen, dass nach derselben das Hauptmoment der Kräfte geometrisch gleich einer gegebenen Strecke $\overline{K'}$ wird.*

Aus den bekannten Strecken $\overline{K}$ und $\overline{K'}$ lassen sich die Projectionen ihrer geometrischen Differenz auf die Coordinatenaxen, d. h. die Grössen $\varDelta L$, $\varDelta M$, $\varDelta N$ bestimmen. Hierauf bleiben noch die Gleichungen (20) und (21) nach den zur

Bestimmung der Verschiebungsaxe OA und der Winkelverschiebung φ dienenden Unbekannten λ, μ, ν aufzulösen.

Diese Unbekannten λ, μ, ν kann man als Coordinaten des Endpunktes A der auf OA aufgetragenen Strecke $\overline{\Omega} = \tan\frac{\varphi}{2}$ betrachten. Da diese Unbekannten den drei Gleichungen zweiten Grades (21) genügen müssen, so ist A einer der Punkte, welche den drei, durch jene Gleichungen dargestellten Flächen zweiter Ordnung gemeinsam sind. Die Aufgabe hat daher soviel Lösungen, als diese drei Flächen gemeinsame Punkte haben.

Die Flächen (21) können durch drei andere, einfachere Flächen ersetzt werden, welche dieselben gemeinsamen Punkte A haben. Die Gleichungen dieser neuen Flächen erhält man in folgender Weise.

Durch Elimination der Grössen β und γ aus den Gleichungen (21) findet man

$$\alpha - \lambda(\delta + a) - \tfrac{1}{2}[(1+\lambda^2)\Delta L + (\lambda\mu + \nu)\Delta M + (\lambda\nu - \mu)\Delta N] = 0,$$

oder wenn man

$$\delta + a + \tfrac{1}{2}(\lambda \Delta L + \mu \Delta M + \nu \Delta N) = s \tag{26}$$

setzt:

$$\alpha - \lambda s - \tfrac{1}{2}(\Delta L + \nu \Delta M - \mu \Delta N) = 0. \tag{27}$$

Ebenso findet man die Gleichungen:

$$\beta - \mu s - \tfrac{1}{2}(\Delta M + \lambda \Delta N - \nu \Delta L) = 0, \tag{28}$$

$$\gamma - \nu s - \tfrac{1}{2}(\Delta N + \mu \Delta L - \lambda \Delta M) = 0. \tag{29}$$

Die in diesen Gleichungen vorkommende Hilfsgrösse s lässt sich vermittelst der Formel (20) in folgender Gestalt darstellen:

$$s = a + (L + \tfrac{1}{2}\Delta L)\lambda + (M + \tfrac{1}{2}\Delta M)\mu + (N + \tfrac{1}{2}\Delta N)\nu. \tag{30}$$

Dieser Ausdruck ist ebenso, wie die Ausdrücke von α, β, γ, linear in Bezug auf λ, μ, ν; daher sind die Gleichungen (27), (28), (29) für diese Unbekannten vom zweiten Grade; sie stellen also drei Flächen zweiter Ordnung dar, die, wie man leicht sehen kann, geradlinige Paraboloide sind; man kann sie entstanden denken durch Bewegung dreier Geraden parallel einer und derselben Ebene, die senkrecht ist zu der Verbindungslinie des Punktes O mit der Mitte der Verbindungsstrecke der Endpunkte der Momente $\overline{K}$ und $\overline{K'}$.

Die Gleichung (30) ist nämlich bei constantem s die Gleichung einer zu jener Geraden senkrechten Ebene, während (27) die Gleichung einer anderen Ebene ist; folglich repräsentiren beide Gleichungen zusammen eine Gerade, die mit der Aenderung von s zwar ihre Lage ändert, aber immer der Ebene

$$(L + \tfrac{1}{2}\varDelta L)\lambda + (M + \tfrac{1}{2}\varDelta M)\mu + (N + \tfrac{1}{2}\varDelta N)\nu = 0 \quad (31)$$

parallel bleibt; dieselbe beschreibt daher eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung man durch Elimination von s aus den Gleichungen (27) und (30) erhält. Dasselbe gilt auch von den Gleichungen (28) und (29).

Substituirt man in (27), (28), (29) für α, β, γ ihre Ausdrücke (19), so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
(a_{11} - s)\lambda + (a_{22} + \tfrac{1}{2}\varDelta N)\mu + (a_{13} - \tfrac{1}{2}\varDelta M)\nu &= \tfrac{1}{2}\varDelta L,\\
(a_{21} - \tfrac{1}{2}\varDelta N)\lambda + (a_{22} - s)\mu + (a_{23} + \tfrac{1}{2}\varDelta L)\nu &= \tfrac{1}{2}\varDelta M, \quad (32)\\
(a_{31} + \tfrac{1}{2}\varDelta M)\lambda + (a_{32} - \tfrac{1}{2}\varDelta L)\mu + (a_{33} - s)\nu &= \tfrac{1}{2}\varDelta N.
\end{aligned}$$

Es bleiben nun noch die Gleichungen (30) und (32) bezüglich s, λ, μ, ν aufzulösen. Zum Zwecke grösserer Symmetrie in den Formeln und um unbestimmte Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ zu vermeiden, führen wir statt der Coordinaten λ, μ, ν die homogenen u_1, u_2, u_3, u_4 ein, indem wir setzen:

$$\lambda = \frac{u_1}{u_4}, \quad \mu = \frac{u_2}{u_4}, \quad \nu = \frac{u_3}{u_4}.$$

Dadurch gehen die Formeln (30) und (32) in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned}
(L+\tfrac{1}{2}\varDelta L)u_1+(M+\tfrac{1}{2}\varDelta M)u_2+(N+\tfrac{1}{2}\varDelta N)u_3+(a-s)u_4&=0,\\
(a_{11}-s)u_1+(a_{12}+\tfrac{1}{2}\varDelta N)u_2+(a_{13}-\tfrac{1}{2}\varDelta M)u_3-\tfrac{1}{2}\varDelta L u_4&=0,\\
(a_{21}-\tfrac{1}{2}\varDelta N)u_1+(a_{22}-s)u_2+(a_{23}+\tfrac{1}{2}\varDelta L)u_3-\tfrac{1}{2}\varDelta M u_4&=0,\\
(a_{31}+\tfrac{1}{2}\varDelta M)u_1+(a_{32}-\tfrac{1}{2}\varDelta L)u_2+(a_{33}-s)u_3-\tfrac{1}{2}\varDelta N u_4&=0.
\end{aligned}\right\} (33)$$

Hieraus erhält man durch Elimination von u_1, u_2, u_3, u_4 eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten s

$$S = 0, \quad (34)$$

wenn man setzt:

$$S = \begin{vmatrix}
L + \tfrac{1}{2}\varDelta L, & M + \tfrac{1}{2}\varDelta M, & N + \tfrac{1}{2}\varDelta N, & a - s\\
a_{11} - s, & a_{12} + \tfrac{1}{2}\varDelta N, & a_{13} - \tfrac{1}{2}\varDelta M, & -\tfrac{1}{2}\varDelta L\\
a_{21} - \tfrac{1}{2}\varDelta N, & a_{22} - s, & a_{23} + \tfrac{1}{2}\varDelta L, & -\tfrac{1}{2}\varDelta M\\
a_{31} + \tfrac{1}{2}\varDelta M, & a_{32} - \tfrac{1}{2}\varDelta L, & a_{33} - s, & -\tfrac{1}{2}\varDelta N
\end{vmatrix}.$$

Da diese Gleichung in Bezug auf s vom vierten Grade ist, so ergeben sich für s höchstens vier reelle Werthe. Bestimmt man dieselben und setzt einen derselben in die Gleichungen (33) ein, so hat man vier lineare homogene Gleichungen für u_1, u_2, u_3, u_4. Jedes Werthsystem dieser Unbekannten liefert die zur Bestimmung der gesuchten Verschiebung dienenden Grössen

$$\lambda = \frac{u_1}{u_4}, \ \mu = \frac{u_2}{u_4}, \ \nu = \frac{u_3}{u_4}, \ \tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

Bezeichnet allgemein S_{ki} diejenige Unterdeterminante von S, die man durch Differentiation von S nach dem Elemente der k^{ten} Horizontal- und der i^{ten} Verticalreihe erhält, so hat man:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = S_{k1} : S_{k2} : S_{k3} : S_{k4};$$

sind nicht alle Determinanten S_{ki} gleich Null, so ergeben sich bestimmte Werthe

$$\lambda = \frac{S_{k1}}{S_{k4}}, \quad \mu = \frac{S_{k2}}{S_{k4}}, \quad \nu = \frac{S_{k3}}{S_{k4}},$$

mit deren Hilfe sich die Lage des Punktes A und somit auch die Lage der Axe OA, sowie die Winkelverschiebung φ bestimmen lassen.

Ergiebt sich für s aus der Gleichung $S = 0$ ein reeller Werth, so stellen die Gleichungen (33) vier Ebenen dar, denen der Punkt (u_1, u_2, u_3, u_4) gemeinsam ist. Tritt der Fall ein, dass gleichzeitig $S_{k1} = 0$, $S_{k2} = 0$, $S_{k3} = 0$, $S_{k4} = 0$ ist, so schneiden sich diese Ebenen in derselben Geraden oder fallen in eine Ebene zusammen. Im ersteren Falle existiren unendlich viele Axen OA, die sämmtlich in einer durch O und die Schnittlinie der Ebenen (33) hindurchgehenden Ebene liegen; jeder dieser Axen entspricht eine bestimmte Winkelverschiebung φ; dieselbe bestimmt sich durch den Radiusvector $OA = \tan\frac{\varphi}{2}$, den man von O nach dem Schnittpunkte der entsprechenden Axe mit der Schnittlinie der Ebenen (33) ziehen kann.

Wenn alle vier Ebenen (33) durch den Ursprung O hindurchgehen und sich in derselben Geraden schneiden, so ist diese Gerade die Verschiebungsaxe und die Winkelverschiebung ist willkürlich; es kann daher jede beliebige auf ihr aufgetragene Strecke OA für $\tan\frac{\varphi}{2}$ gewählt werden.

Fallen endlich die vier Ebenen (33) in eine einzige (P) zusammen, die nicht durch den Ursprung O geht, so kann jede durch O gezogene Gerade als Verschiebungsaxe gewählt werden; die Winkelverschiebung bestimmt sich durch den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene (P). Geht aber die Ebene (P) durch O, so kann jede in dieser Ebene durch O gezogene Gerade als Verschiebungsaxe gewählt werden, wobei die Winkelverschiebung ganz willkürlich bleibt. Betrachten wir nun die wichtigsten Specialfälle.

92. Es sei $\Delta L = 0$, $\Delta M = 0$, $\Delta N = 0$; d. h. es soll eine Verschiebung bestimmt werden, die das Hauptmoment $\overline{K}$ nicht ändert. Da der Hauptvector $\overline{R}$ sich dabei gleichfalls nicht ändert, so repräsentiren die Kräfte nach der Verschiebung ein dem ursprünglichen äquivalentes Kräftesystem; man kann daher die Axe der gesuchten Verschiebung eine *Axe der Aequivalenz* nennen.

Im vorliegenden Falle reduciren sich die Gleichungen (33) und (34) auf die folgenden:

$$Lu_1 + Mu_2 + Nu_3 + (a - s)u_4 = 0, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} (a_{11} - s)u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= 0, \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - s)u_2 + a_{23}u_3 &= 0, \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + (a_{33} - s)u_3 &= 0, \end{aligned} \tag{36}$$

$$(a - s)S_{14} = 0, \tag{37}$$

mit

$$S_{14} = \begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - s, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - s \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Die Gleichung (37) ist erfüllt, wenn man $s = a$ setzt, woraus $\delta = 0$ folgt, sowie

$$\begin{aligned} (a_{11} - a)u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= 0, \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - a)u_2 + a_{23}u_3 &= 0, \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + (a_{33} - a)u_3 &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Sollen diese drei Gleichungen durch Werthe von u_1, u_2, u_3 erfüllt werden, die nicht alle drei gleich Null sind, so muss die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} - a, & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - a, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - a \end{vmatrix}$$

verschwinden, d. h. es muss $s = a$ eine Wurzel der Gleichung $S_{14} = 0$ sein. Die Lösung der vorliegenden Aufgabe hängt daher nur von den Wurzeln dieser Gleichung ab, und da dieselbe vom 3. Grade ist, also mindestens eine reelle Wurzel haben muss, so ist die Lösung der Aufgabe immer möglich.

Setzt man in die Gleichungen (36) für s eine der reellen Wurzeln der Gleichung $S_{14} = 0$ ein, so hat man die Gleichungen dreier, durch den Ursprung O gehender Ebenen, die sich entweder in derselben Geraden schneiden oder in eine und dieselbe Ebene (P) zusammenfallen. Im ersten Falle ist die Schnittlinie der Ebenen die gesuchte Axe der Aequivalenz. Ist s nicht gleich a, so geht die Ebene (35) nicht durch den Ursprung O und die betreffende Axe der Aequivalenz trifft sie in einem Punkte A. Aus dem Radiusvector $OA = \tan\frac{\varphi}{2}$ bestimmt sich dann die Winkelverschiebung φ. Das Zusammenfallen der Ebenen (36) in eine einzige (P) tritt ein, wenn die Unterdeterminanten zweiten Grades, die man durch Differentiation der Determinante S_{14} nach den Elementen einer beliebigen Reihe erhält, verschwinden. In diesem Falle ist jede in der Ebene (P) durch O gezogene Gerade eine Axe der Aequivalenz; ist s nicht gleich a, geht also die Ebene (35) nicht durch den Ursprung O, so trifft die Axe diese Ebene in einem Punkte A, aus dessen Radiusvector $OA = \tan\frac{\varphi}{2}$ sich die Winkelverschiebung bestimmt.

Untersuchen wir nun den Specialfall, dass $s = a$ ist. Dann nimmt die Gleichung (35) die Form an

$$Lu_1 + Mu_2 + Nu_3 = 0 \tag{40}$$

und stellt eine durch O gehende Ebene dar. Da die Determinante A gleich Null ist, so werden die Gleichungen (39) durch Werthe von u_1, u_2, u_3 erfüllt, die nicht sämmtlich Null sind. Bezeichnet allgemein A_{ki} die Derivirte der Determinante A nach dem Elemente der k^{ten} Horizontal- und i^{ten} Verticalreihe, so hat man

$$u_1 : u_2 : u_3 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3}, \tag{41}$$

während die Gleichung (40) die Bedingung

$$A_{k1} L + A_{k2} M + A_{k3} N = 0 \tag{42}$$

für $k = 1, 2, 3$ erfordert.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann den Gleichungen (39) und (40) nur durch $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ für beliebige Werthe von u_4 genügt werden. Dies liefert $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, was gar keiner Verschiebung entspricht.

Sind aber die Determinanten A_{ki} nicht alle gleichzeitig gleich Null und erfüllen sie die Bedingung (42), so sind (39) und (40) die Gleichungen von 4, in der Geraden (41) sich schneidenden Ebenen. Diese Gerade ist die Axe der Aequivalenz. Da die Lage des die Strecke $OA = \tan \frac{\varphi}{2}$ bestimmenden Punktes A auf ihr unbestimmt ist, so ist auch die Winkelverschiebung φ willkürlich. Dies zeigt, dass das Hauptmoment der Kräfte sich bei fortwährender Drehung des Körpers um die Gerade (41) im einen oder im anderen Sinne nicht ändert.

Nach der Bedingung (42) steht das Hauptmoment $\overline{K}$ auf der Geraden (41) senkrecht. Man kann daher in irgend zwei Punkten dieser Geraden zwei Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ angreifen lassen, die den Bedingungen

$$\overline{P} + \overline{Q} = \overline{R} \text{ und } \overline{MP} + \overline{MQ} = \overline{K}$$

genügen. Zwei solche Kräfte sind dem gegebenen Kräftesystem während der ganzen Zeit der Drehung des Körpers um die Gerade (41) äquivalent.

Sind die Angriffspunkte der Kräfte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ unbeweglich fixirt, so rufen dieselben Widerstände $-\overline{P}$, $-\overline{Q}$ hervor, mit denen sie im Gleichgewicht sein müssen; ersetzt man also $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ durch die gegebenen Kräfte, so sind diese mit denselben Widerständen während der ganzen Zeit der Rotation des Körpers um die Gerade (41) im Gleichgewicht. Diese Gerade hat daher eine ähnliche Eigenschaft, wie der Mittelpunkt von Parallelkräften und wie die Centrallinie. Möbius nennt solche Rotationsaxen *Hauptaxen der Drehung* oder einfach *Hauptaxen*.

In dem Specialfalle, dass $L=0$, $M=0$, $N=0$, d. h. $K=0$ ist, reducirt sich das Kräftesystem auf eine im Punkt O angreifende Einzelkraft $\overline{R}$. Dann wird die Gleichung (42) identisch erfüllt und die Gerade (41) wird wieder zur Hauptaxe der Drehung.

Ist der Punkt O fest, so ist die Resultante $\overline{R}$ oder das ihr äquivalente gegebene Kräftesystem mit dem Widerstande $-\overline{R}$ während der ganzen Zeit der Rotation des Körpers um die Gerade (41) im Gleichgewicht.

Sind alle A_{ki} gleich Null, so reduciren sich die Gleichungen (39) auf eine einzige, welche die Gleichung einer durch den Ursprung O gehenden Ebene (P) ist; wenn dabei das Hauptmoment $\overline{K}$ von Null verschieden ist, so schneidet (P) die Ebene (40) in einer Geraden, welche die Hauptaxe ist. Ist dagegen $K=0$, so ist jede Gerade in der Ebene (P) eine Hauptaxe.

Sind endlich alle Elemente der Determinante A gleich Null, so hat man

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0,\quad K=0,$$

und die Gleichungen (39) und (40) liefern keine Bedingung für u_1, u_2, u_3, u_4. Daher ist jede durch O gehende Gerade eine Hauptaxe, d. h. bei jeder Rotation des Körpers um O bleiben die Kräfte im Gleichgewicht mit dem Widerstande dieses Punktes. Man nennt dies den *astatischen Zustand* des Körpers; der Punkt O ist dann der Mittelpunkt des Kräftesystems.

93. Setzen wir nun voraus, die Gleichung (42) sei nicht erfüllt, es gäbe also keine Hauptrotationsaxen für den Punkt O, und sehen wir zu, ob es keinen anderen Punkt giebt, für den solche Axen existiren.

Bezeichnen ξ, η, ζ die Coordinaten des gesuchten Punktes in Bezug auf die Axen Ox, Oy, Oz und verlegt man den Coordinatenursprung nach diesem Punkte, so sieht man leicht, dass die Gleichungen (35) und (36) für diesen neuen Ursprung lauten werden:

$$(L - \eta \Sigma Z + \zeta \Sigma Y)\lambda + (M - \zeta \Sigma X + \xi \Sigma Z)\mu$$
$$+ (N - \xi \Sigma Y + \eta \Sigma X)\nu = 0,$$
$$(a_{11} - a + \eta \Sigma Y + \zeta \Sigma Z)\lambda + (a_{12} = \xi \Sigma Y)\mu$$
$$+ (a_{13} - \xi \Sigma Z)\nu = 0, \tag{43}$$
$$(a_{21} - \eta \Sigma X)\lambda + (a_{22} - a + \xi \Sigma X + \zeta \Sigma Z)\mu$$
$$+ (a_{23} - \eta \Sigma Z)\ \nu = 0,$$
$$(a_{31} - \xi \Sigma X)\lambda + (a_{22} - \zeta \Sigma Y)\mu +$$
$$(a_{33} - a + \xi \Sigma Y + \eta \Sigma Y)\nu = 0;$$

hierin sind für u_1, u_2, u_3 die ihnen proportionalen Grössen λ, μ, ν eingesetzt worden.

Setzt man

$$\mu\zeta - \nu\eta = p,\ \nu\xi - \lambda\zeta = q,\ \lambda\eta - \mu\xi = r, \tag{44}$$

so lassen sich die Gleichungen (43) schreiben:

$$L\lambda + M\mu + N\nu = p\Sigma X + q\Sigma Y + r\Sigma Z,$$
$$(a_{11} - a)\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu + p\Sigma Y - q\Sigma Z = 0, \tag{45}$$
$$a_{21}\lambda + (a_{22} - a)\mu + a_{23}\nu + p\Sigma Z - r\Sigma X = 0,$$
$$a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33} - a)\nu + q\Sigma X - p\Sigma Y = 0;$$

hier kann man nun die sechs Grössen λ, μ, ν, p, q, r als die gesuchten betrachten, wobei zwischen ihnen die Bedingung

$$\lambda p + \mu q + \nu r = 0 \tag{46}$$

besteht. Sind diese Grössen gefunden, so dienen die Gleichungen (44) zur Bestimmung der Coordinaten ξ, η, ζ des gesuchten Punktes. Da infolge der Bedingung (34) jede der Gleichungen (44) die Folge der beiden anderen ist, so stellen dieselben eine Gerade dar, und als Punkt (ξ, η, ζ) kann man jeden Punkt dieser Geraden wählen. Sie bildet mit den Axen Ox, Oy, Oz, also auch mit den dazu parallelen, nach dem neuen Ursprung verlegten Axen Winkel, deren Cosinus resp. $\frac{\lambda}{\Omega}$, $\frac{\mu}{\Omega}$, $\frac{\nu}{\Omega}$ sind; dies sind aber dieselben Winkel, welche die Hauptrotationsaxe mit den Coordinatenaxen bildet; also ist die Gerade (44) eine Hauptaxe für jeden ihrer Punkte.

Ist der Hauptvector $\overline{R}$ der Kräfte nicht gleich Null, so hat das Kräftesystem eine bestimmte Centralaxe. Setzen wir dies voraus und wählen wir den Coordinatenursprung O in einem Punkte der Centralaxe, sowie die Axe der positiven x

in der Richtung der Centralaxe im selben Sinne mit dem Hauptvector $\overline{R}$; dann ist

$$\Sigma X = R, \ \Sigma Y = 0, \ \Sigma Z = 0, \ M = 0, \ N = 0;$$

daher gehen die Gleichungen (45) über in:

$$L\lambda = pR, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} (a_{11} - a)\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu &= 0, \\ a_{21}\lambda + (a_{22} - a)\mu + a_{23}\nu - rR &= 0, \\ a_{31}\lambda + a_{32}\mu + (a_{33} - a)\nu + qR &= 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{R}{A}(A_{21}r - A_{31}q), \\ \mu &= \frac{R}{A}(A_{22}r - A_{32}q), \\ \nu &= \frac{R}{A}(A_{23}r - A_{33}q). \end{aligned} \tag{49}$$

Substituirt man diese Werthe für λ, μ, ν in die Gleichungen (46) und (47), so ergiebt sich:

$$p(A_{21}r - A_{31}q) + q(A_{22}r - A_{32}q) + r(A_{23}r - A_{33}q) = 0, \tag{50}$$

$$p = \frac{L}{A}(A_{21}r - A_{31}q). \tag{51}$$

Eliminirt man endlich p aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man die in Bezug auf q und r homogene Gleichung zweiten Grades

$$\frac{L}{A}(A_{21}r - A_{31}q)^2 - A_{32}q^2 + (A_{22} - A_{33})qr + A_{23}r^2 = 0, \tag{52}$$

die für das Verhältniss $\frac{q}{r}$ zwei reelle oder imaginäre Werthe liefert. Im ersten Falle kann man aus diesem Verhältnisse zwei Systeme reeller Grössen q und r bestimmen, die wir mit (q_1, r_1) und (q_2, r_2) bezeichnen wollen; mit Hilfe der Formeln (49) und (51) findet man dann die entsprechenden Werthe für λ, μ, ν, p. Bezeichnen wir diese Werthe mit $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, p_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2, p_2)$, so sind nach den Formeln (44) die Gleichungen der Hauptrotationsaxen:

$$\begin{aligned} \mu_1\zeta - \nu_1\eta = p_1, \ \nu_1\xi - \lambda_1\zeta = q_1, \ \lambda_1\eta - \mu_1\xi = r_1, \\ \mu_2\zeta - \nu_2\eta = p_2, \ \nu_2\xi - \lambda_2\zeta = q_2, \ \lambda_2\eta - \mu_2\xi = r_2. \end{aligned} \tag{53}$$

Das gegebene Kräftesystem kann somit nicht mehr als

zwei Hauptrotationsaxen besitzen. Sind die Wurzeln der Gleichung (52) gleich, so fallen dieselben in eine einzige zusammen; im Falle imaginärer Wurzeln giebt es gar keine Hauptrotationsaxen.

Betrachten wir nun einige bemerkenswerthe Specialfälle.

a) Gesetzt, alle Kräfte seien einer Ebene parallel. Da die Centralaxe dieser Ebene gleichfalls parallel sein muss, so kann man, indem man sie als x-Axe wählt, die Ebene xOy allen Kräften parallel legen. Unter dieser Voraussetzung hat man $Z=0$, $Z'=0, \ldots$, also $a_{13}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=0$; ausserdem ist $a_{31}=0$, weil $a_{31}-a_{13}=M=0$ ist. Legt man nun die Ebene yOz durch den Mittelpunkt der Projectionen aller Kräfte auf Gerade parallel dem Hauptvector $\overline{R}$ (d. h. durch den Centralpunkt in der Centralebene), so wird $a_{11}=\Sigma xX=0$. Für die Determinante A erhält man somit den Ausdruck

$$A = \begin{vmatrix} -a_{22}, & a_{12}, & 0 \\ a_{12}, & 0, & 0 \\ 0, & a_{32}, & -a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 a_{22}.$$

Zugleich ergiebt sich:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0, \ A_{12} = a_{12}a_{22}, \ A_{13} = a_{12}a_{32}, \\ A_{21} &= a_{12}a_{22}, \ A_{22} = a_{22}^2, \ A_{23} = a_{22}a_{32}, \\ A_{31} &= 0, \ A_{32} = 0, \ A_{33} = -a_{12}^2. \end{aligned}$$

Hiermit gehen die Formeln (49), (51) und (52) über in:

$$\lambda = \frac{Rr}{a_{12}}, \ \mu = \frac{Ra_{22}r}{a_{12}^2}, \ \nu = \frac{R}{a_{12}^2 a_{22}}(a_{12}^2 q + a_{22}a_{32}r),$$

$$p = -\frac{a_{32}r}{a_{12}}, \ (a_{12}^2 + a_{22}^2)qr = 0.$$

Die letzte Gleichung hat zwei reelle Lösungen $r_1=0$, $q_2=0$, denen die Werthe

$$\lambda_1 = 0, \ \mu_1 = 0, \ \nu_1 = \frac{R}{a_{22}}q_1, \ p_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{Rr_2}{a_{12}}, \ \mu_2 = \frac{Ra_{22}r_2}{a_{12}^2}, \ \nu_2 = \frac{Ra_{32}r_2}{a_{12}^2}, \ p_2 = -\frac{a_{32}r_2}{a_{12}}$$

entsprechen, wo q_1 und r_2 beliebige reelle Werthe haben können. Hieraus folgt, dass *jedes System von Kräften, die einer Ebene parallel sind, zwei Hauptrotationsaxen hat, wenn der Hauptvector nicht gleich Null ist.*

Die Formeln (53) geben die folgenden Gleichungen für diese Geraden:

$$\eta = 0, \quad \xi = \frac{a_{22}}{R}, \qquad (54)$$

$$a_{22}\zeta - a_{32}\eta = -\frac{a_{12}a_{32}}{R}, \quad a_{32}\xi - a_{12}\zeta = 0, \quad a_{12}\eta - a_{22}\xi = \frac{a_{12}^2}{R}; \qquad (55)$$

man sieht aus denselben, dass die eine Hauptrotationsaxe in der Ebene xOz parallel der Axe Oz liegt im Abstande $\frac{a_{22}}{R}$ von ihr, während die zweite durch den Punkt $\left(0, \frac{a_{12}}{R}, 0\right)$, d. h. durch den Centralpunkt in der Centralebene geht und parallel ist zu der Geraden, die durch den Ursprung O und den Punkt $\left(\frac{a_{12}}{R}, \frac{a_{22}}{R}, \frac{a_{32}}{R}\right)$ gelegt werden kann. Dieser letztere Punkt ist der Mittelpunkt des Systems von Parallelkräften, welches die Projectionen der gegebenen Kräfte auf diejenigen Geraden, die man durch ihre Angriffspunkte parallel zu Oy legen kann, in Verbindung mit der im Punkte O angreifenden und längs Oy gerichteten Kraft R bilden. Die Gerade, die durch O und den Punkt $\left(\frac{a_{12}}{R}, \frac{a_{22}}{R}, \frac{a_{32}}{R}\right)$ geht, liegt daher in der Centralebene und ist dem Arme desjenigen Paares parallel, welches die Resultante R der der Axe Oy parallelen Kräfte, die im Mittelpunkte dieser Kräfte angreift, mit der in O angreifenden, ihr entgegengesetzt gleichen Kraft R bildet. Ueberdies zeigt die letzte der Gleichungen (55), dass die Projection jener Geraden auf die Ebene xOy auf der durch die Punkte $\left(\frac{a_{22}}{R}, 0, 0,\right)$ und $\left(0, \frac{a_{12}}{R}, 0\right)$ gehenden Geraden senkrecht steht. Aus allen diesen Umständen geht hervor, dass die Gerade (55) die Centrallinie des Kräftesystems ist.

Liegen alle Kräfte in der Ebene xOy, so ist $z = 0$, $z' = 0, \ldots$, also $a_{32} = 0$; die Gleichungen (55) gehen über in die folgenden

$$\zeta = 0, \quad a_{12}\eta - a_{22}\xi = \frac{a_{12}^2}{R},$$

die offenbar die Gleichungen der Centrallinie des ebenen Kräftesystems sind. Der Punkt $\left(\frac{a_{22}}{R}, 0, 0\right)$ ist der Mittelpunkt dieses Kräftesystems.

Gesetzt, das System der der Ebene xOy parallelen Kräfte reducire sich nur auf zwei Kräfte $\overline{F}$, $\overline{F'}$. Man hat dann

$$X + X' = R, \quad Y + Y' = 0,$$
$$a_{12} = (x - x')Y, \; a_{22} = (y - y')Y, \; a_{32} = (z - z')Y,$$

und die Gleichungen (55) gehen über in die folgenden

$$(y - y')\zeta - (z - z')\left(\eta - \frac{a_{12}}{R}\right) = 0,$$
$$(z - z')\xi - (x - x')\zeta = 0,$$
$$(x - x')\left(\eta - \frac{a_{12}}{R}\right) - (y - y')\xi = 0;$$

es sind dies die Gleichungen der Verbindungslinie der Angriffspunkte (x, y, z) und (x', y', z').

b) Betrachten wir ferner den Fall, dass die gegebenen Kräfte sich auf eine einzige Kraft $\overline{R}$ reduciren lassen. Es ist dann $L = 0$, d. h. $a_{32} = a_{23}$; daher gilt die Gleichung $a_{ki} = a_{ik}$ für alle Indices k und i; die Determinante A wird also symmetrisch und es ist auch $A_{ki} = A_{ik}$ für alle Indices k und i. Die Formeln (51) und (52) gehen über in:

$$p = 0, \; A_{23}q^2 - (A_{22} - A_{33})qr - A_{23}r^2 = 0. \qquad (56)$$

Die letzte Gleichung liefert:

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{A_{22} - A_{33} + \sqrt{(A_{22} - A_{33})^2 + 4A_{23}^2}}{2A_{23}};$$
$$\frac{q_2}{r_2} = \frac{A_{22} - A_{33} - \sqrt{(A_{22} - A_{33})^2 + 4A_{23}^2}}{2A_{23}}; \qquad (57)$$

wenn also das Kräftesystem eine Einzelresultante hat, so existiren immer zwei Hauptrotationsaxen.

Da $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ ist, so nehmen die beiden ersten der Gleichungen (53), welche die Projectionen der Hauptrotationsaxen auf die Ebene yOz darstellen, die Gestalt an:

$$\mu_1\zeta - \nu_1\eta = 0, \; \mu_2\zeta - \nu_2\eta = 0;$$

man sieht hieraus, dass diese Projectionen durch den Ursprung O gehen, wozu erforderlich ist, dass die Hauptrotationsaxen die Axe Ox, d. h. die Richtungslinie der Resultante aller Kräfte, schneiden. Ferner giebt die Bedingung (46).

$$\mu_1 q_1 + \nu_1 r_1 = 0, \; \mu_2 q_2 + \nu_2 r_2 = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{\nu_1}{\mu_1} \cdot \frac{\nu_2}{\mu_2} = \frac{q_1}{r_1} \cdot \frac{q_2}{r_2};$$

aus den Gleichungen (57) folgt aber $\frac{q_1}{r_1} \cdot \frac{q_2}{r_2} = -1$; mithin ist auch

$$\frac{\nu_1}{\mu_1} \cdot \frac{\nu_2}{\mu_2} = -1,$$

d. h. *die Hauptrotationsaxen liegen in zwei zu einander senkrechten, durch die Resultante gehenden Ebenen.*

Wählt man eine dieser Ebenen zur Ebene xOy, die andere als Ebene xOz, so wird $\nu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $q_1 = 0$, $r_2 = 0$; daher muss $A_{23} = 0$ sein. Dann geben die Formeln (49):

$$\lambda_1 = \frac{R}{A} A_{21} r_1, \quad \mu_1 = \frac{R}{A} A_{22} r_1,$$
$$\lambda_2 = -\frac{R}{A} A_{31} q_2, \quad \nu_2 = -\frac{R}{A} A_{33} q_2;$$

hiermit ergiebt sich nach den Gleichungen (53):

$$\begin{aligned} \zeta = 0, \quad A_{21}\eta - A_{22}\xi = \frac{A}{R}, \\ \eta = 0, \quad A_{31}\zeta - A_{33}\xi = \frac{A}{R}. \end{aligned} \qquad (58)$$

Legt man dagegen die Ebene yOz durch den Centralpunkt in der Centralebene, d. h. durch den Mittelpunkt des Systems der Parallelkräfte, welches die Projectionen der gegebenen Kräfte auf Gerade, die parallel der Resultante $\overline{R}$ durch die Angriffspunkte der Kräfte gelegt sind, bilden, so wird $a_{11} = 0$, $a = a_{22} + a_{33}$, also

$$A = A_{21} a_{21} - A_{22} a_{33} = A_{31} a_{31} - A_{33} a_{22},$$
$$A_{21} a_{33} + A_{22} a_{32} = 0, \quad A_{31} a_{21} + A_{33} a_{23} = 0;$$

hiermit reduciren sich die Gleichungen (58) auf die folgenden:

$$\zeta = 0, \; a_{32}\left(\eta - \frac{a_{21}}{R}\right) + a_{33}\left(\xi - \frac{a_{33}}{R}\right) = 0,$$
$$\eta = 0, \; a_{23}\left(\zeta - \frac{a_{31}}{R}\right) + a_{22}\left(\zeta - \frac{a_{22}}{R}\right) = 0.$$

Diese Geraden können leicht construirt werden.*)

Ist der Hauptvector R gleich Null, so reduciren sich die gegebenen Kräfte entweder auf ein Paar, oder sie sind im

*) S. Möbius: „Lehrbuch der Statik“, § 150.

Gleichgewicht. Jedenfalls ist $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, so dass die Coordinaten ξ, η, ζ aus den Gleichungen (43) verschwinden; diese reduciren sich daher auf die Gleichungen (35) und (36). Bestehen die letzteren gleichzeitig, so existirt für jeden Punkt des Raumes (wie wir in § 92 gesehen haben) eine einzige Hauptrotationsaxe oder unendlich viele solcher Axen. Bestehen dagegen die Gleichungen (35) und (36) nicht gleichzeitig, so giebt es in keinem Punkte der Raumes Hauptrotationsaxen.

Wenn sich die gegebenen Kräfte auf ein Paar reduciren, so ist das Hauptmoment $\overline{K}$ nicht gleich Null und steht senkrecht auf der Hauptrotationsaxe, wie aus Gleichung (35) hervorgeht. Man kann daher auf dieser Axe den Arm eines Paares so wählen, dass sein Moment gleich $\overline{K}$ wird und dass dieses Paar daher dem gegebenen Kräftesystem bei fortwährender Rotation des Körpers um die Hauptrotationsaxe äquivalent bleibt.

Im Falle $K = 0$ sind die Kräfte in einem Gleichgewichtszustande, der durch eine Rotation des Körpers um die Hauptaxe nicht gestört wird. Jede Axe, die diese Eigenschaft hat, nennt Möbius eine *Gleichgewichtsaxe.* Aus dem Obigen geht hervor, dass zur Existenz von Gleichgewichtsaxen nothwendig und hinreichend ist, dass die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} - a, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - a, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - a \end{vmatrix}$$

verschwindet.

94. Gesetzt, es sei $R = 0$, aber das Hauptmoment $\overline{K}$ sei nicht gleich Null, d. h. die Kräfte reduciren sich auf ein Paar, und suchen wir nun eine Verschiebung des Körpers, nach welcher die Kräfte ins Gleichgewicht kommen. Die Lösung dieses Problems ergiebt sich aus den Formeln des § 91. Da $\overline{K'} = 0$ sein soll, so hat man

$$\Delta L = -L, \quad \Delta M = -M, \quad \Delta N = -N;$$

hiermit gehen die Gleichungen (33) über in:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}Lu_1+\tfrac{1}{2}Mu_2+\tfrac{1}{2}Nu_3+(a-s)u_4=0\,,\\
&(a_{11}-s)u_1+\tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21})u_2+\tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})u_3+\tfrac{1}{2}Lu_4=0\,,\\
&\tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21})u_1+(a_{22}-s)u_2+\tfrac{1}{2}(a_{23}+a_{32})u_3+\tfrac{1}{2}Mu_4=0\,,\\
&\tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})u_1+\tfrac{1}{2}(a_{23}+a_{32})u_2+(a_{33}-s)u_3+\tfrac{1}{2}Nu_4=0\,.
\end{aligned}\qquad(59)$$

Durch Elimination von u_1, u_2, u_3, u_4 ergiebt sich hieraus zur Bestimmung von s die Gleichung vierten Grades

$$\begin{vmatrix}
\tfrac{1}{2}L, & \tfrac{1}{2}M, & \tfrac{1}{2}N, & a-s\\
a_{11}-s, & \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), & \tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31}), & \tfrac{1}{2}L\\
\tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), & a_{22}-s, & \tfrac{1}{2}(a_{23}+a_{32}), & \tfrac{1}{2}M\\
\tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31}), & \tfrac{1}{2}(a_{23}+a_{32}), & a_{33}-s, & \tfrac{1}{2}N
\end{vmatrix}=0,\quad(60)$$

deren linke Seite in Form einer symmetrischen Determinante geschrieben werden kann, nämlich:

$$\begin{vmatrix}
s-a, & \tfrac{1}{2}L & \tfrac{1}{2}M, & \tfrac{1}{2}N\\
\tfrac{1}{2}L, & s-a_{11}, & -\tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), & -\tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31})\\
\tfrac{1}{2}M, & -\tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), & s-a_{22}, & -\tfrac{1}{2}(a_{23}+a_{32})\\
\tfrac{1}{2}N, & -\tfrac{1}{2}(a_{13}+a_{31}), & -\tfrac{1}{2}(a_{23}+a_{32}), & s-a_{33}
\end{vmatrix}=0.\quad(60')$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung sind bekanntlich sämmtlich reell;*) es existiren daher im Allgemeinen vier Verschiebungen des Körpers, die fähig sind, das gegebene Kräftesystem ins Gleichgewicht zu bringen. Unter den Wurzeln der Gleichung (60) können auch gleiche sein, so dass die Anzahl der der Aufgabe genügenden verschiedenen Verschiebungen auch kleiner als vier sein kann.

Durch eine passende Wahl der Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz kann man die Gleichung (60′) vereinfachen und dann die Realität aller ihrer Wurzeln darthun.

Wählen wir die Axe Ox in der Richtung des Hauptmoments $\overline{K}$, so wird dadurch

$$M=0\,,\; N=0\,,\; \text{also}\; a_{31}=a_{13}\,,\; a_{21}=a_{12}\,.$$

*) Die obige Gleichung gehört zu derselben Gattung wie die, welche zur Bestimmung der säculären Planetenabweichungen dient. Den Beweis dafür, dass sämmtliche Wurzeln einer solchen Gleichung reell sind, findet man in den folgenden Werken: Cauchy. Exerc. de mathématiques, T. IV; Borchardt in Liouville's, Journ., T. XII, 1re série; Sylvester, Philos. Mag., vol. IV, 4. series (1852), pag. 138. S. auch die Werke von Brioschi und Baltzer über die Theorie der Determinanten und des Verfassers Abhandlung „Sur l'équation algébrique à l'aide de laquelle on détermine les oscillations très-petites d'un système de points matériels".

Man kann nun weiter die Richtungen der Axen Oy und Oz so wählen, dass

$$a_{23} + a_{32} = 0$$

wird. Nimmt man nämlich zunächst an, die rechtwinkligen Axen Oy und Oz hätten ganz beliebige Richtungen in der zu Ox senkrechten Ebene und ersetzt dann die Coordinaten y und z durch andere, y' und z', bezüglich neuer Axen Oy' und Oz', so ergiebt sich, wenn man $\sphericalangle yOy' = \alpha$ setzt und die Projectionen der im Punkt (x, y, z) angreifenden Kraft $\overline{F}$ auf die Axen Oy' und Oz' mit Y' und Z', sowie die Werthe der Grössen a_{23} und a_{32} nach der Transformation mit a'_{23} und a'_{32} bezeichnet:

$$y' = y \cos\alpha + z \sin\alpha, \quad z' = -y \sin\alpha + z \cos\alpha,$$
$$Y' = Y \cos\alpha + Z \sin\alpha, \quad Z' = -Y \sin\alpha + Z \cos\alpha.$$

Daher wird

$$a_{23}' = (a_{33} - a_{22}) \sin\alpha \cos\alpha + a_{23} \cos^2\alpha - a_{32} \sin^2\alpha,$$
$$a_{32}' = (a_{33} - a_{22}) \sin\alpha \cos\alpha - a_{23} \sin^2\alpha + a_{32} \cos^2\alpha,$$
$$a_{23}' + a_{32}' = (a_{33} - a_{22}) \sin 2\alpha + (a_{23} + a_{32}) \cos 2\alpha.$$

Setzt man $a_{23}' + a_{32}' = 0$, so erhält man die Gleichung

$$(a_{33} - a_{22}) \sin 2\alpha + (a_{23} + a_{32}) \cos 2\alpha = 0,$$

welche die Bedingung liefert:

$$\tan 2\alpha = \frac{a_{23} + a_{32}}{a_{22} - a_{33}}. \tag{61}$$

Aus diesem, immer möglichen Werthe von $\tan 2\alpha$ ergeben sich für α zwei um 90^0 von einander verschiedene Werthe. Jeder dieser beiden Werthe bestimmt ein Axensystem Oy', Oz', das die verlangte Bedingung erfüllt. Nimmt man nun an, dass die ursprünglichen Axen Oy und Oz mit einem solchen Coordinatensystem zusammenfallen, so hat man $a_{23} + a_{32} = 0$, wodurch die Gleichung (60') die Form annimmt

$$\begin{vmatrix} s - a, & a_{23}, & 0, & 0 \\ a_{23}, & s - a_{11}, & -a_{12}, & -a_{13} \\ 0, & -a_{12}, & s - a_{22}, & 0 \\ 0, & -a_{13}, & 0, & s - a_{33} \end{vmatrix} = 0, \tag{62}$$

oder

$$
\begin{aligned}
&(s-a)(s-a_{11})(s-a_{22})(s-a_{33}) \\
&-(s-a)(s-a_{33})\,a_{12}^2-(s-a)(s-a_{22})\,a_{13}^2 \qquad (62') \\
&-(s-a_{22})(s-a_{33})\,a_{23}^2=0.
\end{aligned}
$$

Der Factor von $(s-a)$ in dieser Gleichung ist die symmetrische Determinante dritten Grades

$$
S'=\begin{vmatrix} s-a_{11}, & -a_{12}, & -a_{13} \\ -a_{12}, & s-a_{22}, & 0 \\ -a_{13}, & 0, & s-a_{33} \end{vmatrix};
$$

setzt man dieselbe gleich Null, so erhält man die Gleichung:

$$(s-a_{11})(s-a_{22})(s-a_{33})-(s-a_{33})\,a_{12}^2-(s-a_{22})\,a_{13}^2=0,$$

welche dieselbe Form hat, wie die in der analytischen Geometrie bei der Bestimmung der Hauptaxen der Flächen zweiter Ordnung auftretende Gleichung. Eine Wurzel σ_1 derselben liegt zwischen $-\infty$ und der kleineren der beiden Grössen a_{22}, a_{33}; die zweite Wurzel σ_2 liegt zwischen a_{22} und a_{33} und die dritte σ_3 zwischen der grösseren der beiden Grössen a_{22}, a_{33} und $+\infty$.

Setzt man in die linke Seite der Gleichung (62′) die Werthe

$$-\infty,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ +\infty$$

ein, so ergeben sich Resultate mit den respectiven Vorzeichen

$$+,\ -,\ +,\ -,\ +;$$

hieraus folgt, dass Gleichung (60) vier reelle Wurzeln s_1, s_2, s_3, s_4 hat, die folgendermassen vertheilt sind:

$$-\infty < s_1 < \sigma_1 < s_2 < \sigma_2 < s_3 < \sigma_3 < s_4 < +\infty.$$

Untersuchen wir nun den Specialfall, dass alle Kräfte in derselben Ebene yOz liegen. Dann ist

$$a_{11}=0,\ a_{12}=0,\ a_{13}=0,\ a=a_{22}+a_{33},$$

so dass die Gleichungen (59) und (62) sich auf die folgenden reduciren:

$$
\left.\begin{aligned}
a_{23}u_1+(a_{22}+a_{33}-s)\,u_4&=0, \\
-su_1+a_{23}u_4&=0, \\
(a_{22}-s)\,u_2&=0, \\
(a_{33}-s)\,u_3&=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (63)
$$

$$[(s-a_{22}-a_{33})\,s-a_{23}^2]\,(s-a_{22})(s-a_{33})=0. \qquad (64)$$

Durch Auflösung der letzten Gleichung ergeben sich als Wurzeln:

$$s_1 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{22} + a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2}\,,$$

$$s_2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{22} + a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2}\,,$$

$$s_3 = a_{22}\,,\quad s_4 = a_{33}\,.$$

Nehmen wir zunächst an, alle diese Wurzeln seien verschieden von einander. Wählt man nun für s einen der beiden Werthe s_1, s_2, so werden die Gleichungen (63) erfüllt, wenn man setzt

$$u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_1 : u_4 = a_{23} : s,$$

wodurch man erhält:

$$\mu = 0,\ \nu = 0,\ \lambda = \frac{a_{23}}{s}\,.$$

Diese Gleichungen bestimmen eine Verschiebungsaxe, die längs der Coordinatenaxe Ox gerichtet ist, und eine Winkelverschiebung φ, die durch die Gleichung

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \pm\lambda = \pm\frac{a_{23}}{s}$$

gegeben ist. Bedeuten φ_1 und φ_2 die den Wurzeln s_1 und s_2 entsprechenden Winkelverschiebungen, so hat man

$$\tan\frac{\varphi_1}{2}\cdot\tan\frac{\varphi_2}{2} = -\frac{a_{23}^2}{s_1 s_2} = 1\,,$$

also $\varphi_2 = 180^0 - \varphi_1$.

Wählt man $s = s_3 = a_{22}$ für die Gleichungen (63), so hat man

$$u_1 = 0,\ u_4 = 0,\ u_3 = 0$$

zu setzen, während u_2 eine willkürliche Grösse bleibt, die jedoch nicht gleich Null sein darf, wenn man den, keine Lösung der Aufgabe darbietenden Fall, dass die vier Grössen u_1, u_2, u_3, u_4 sämmtlich gleich Null sind, ausschliesst. Wählt man also für u_2 einen beliebigen von Null verschiedenen Werth, so wird

$$\cos(\Omega x) = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = 0,$$

$$\cos(\Omega y) = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = \pm 1,$$

$$\cos(\Omega z) = \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} = 0.$$

Die diesen Cosinus entsprechenden Winkel bestimmen eine Verschiebungsaxe $\overline{\Omega}$ längs der Coordinatenaxe Oy im Sinne der positiven oder negativen y gerichtet, je nachdem u_2 positiv oder negativ ist. Zugleich ist

$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{u_1}{u_4}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_4}\right)^2 + \left(\frac{u_3}{u_4}\right)^2} = \infty,$$

also $\tan\frac{\varphi}{2} = \infty$, $\varphi = 180^0$.

Die erforderliche Verschiebung kann also durch eine Drehung des Körpers um die Axe Oy um 180^0 hervorgebracht werden.

Wählt man endlich $s = s_4 = a_{33}$, so findet man in derselben Weise, dass die gesuchte Verschiebung durch eine Drehung des Körpers um die Axe Oz um 180^0 hervorgebracht werden kann.

Der Umstand, dass eine Drehung des Körpers um die Axe Oy um 180^0 die Kräfte ins Gleichgewicht bringt, erklärt sich folgendermassen. Eine solche Drehung ist gleichbedeutend mit einer Aenderung der Richtungen aller der Axe Oz parallelen Componenten $Z, Z', \ldots$ in die entgegengesetzten $-Z, -Z', \ldots$ ohne Aenderung der Componenten $Y, Y', \ldots$ und der Angriffspunkte der Kräfte. Dadurch verändern sich aber nur die Vorzeichen der Grössen a_{23} und a_{33}, so dass die Bedingungsgleichung $a_{23} + a_{32} = 0$ in $-a_{23} + a_{32} = 0$ oder $\Sigma(yZ - zY) = 0$ übergeht, welches die Bedingung des Gleichgewichts der Kräfte ist.

In ähnlicher Weise erklärt es sich, weshalb eine Drehung des Körpers um die Axe Oz um 180^0 die Kräfte ins Gleichgewicht bringt.

Untersuchen wir nun, wann die Gleichung (64) gleiche Wurzeln hat. Die Gleichung $s_1 = s_2$ erfordert, dass $a_{22} + a_{33} = 0$ und $a_{23} = 0$ sei; daraus folgt aber $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. In diesem Falle kann man den Gleichungen (63) genügen, indem man $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ setzt und für u_1 und u_4 willkürliche Werthe wählt. Dies liefert eine längs der Axe Ox gerichtete Verschiebungsaxe mit einer willkürlichen Winkelverschiebung φ, da $\tan\frac{\varphi}{2} = \pm\frac{u_1}{u_4}$ ist. Wegen $a_{23} = 0$ sind aber die Kräfte im Gleichgewicht, und zwar bleibt dieses Gleichgewicht bei fort-

währender Drehung des Körpers um die Axe Ox ungestört; die Gerade Ox ist daher eine Gleichgewichtsaxe.

Damit eine der Wurzeln s_1 oder s_2 gleich s_3 werde, ist erforderlich, dass

$$a_{22}a_{33} + a_{23}^2 = 0 \tag{65}$$

sei, woraus folgt:

$$s_1 = a_{22} = s_3, \; s_2 = a_{33} = s_4.$$

Infolge der Bedingung (65) werden die beiden ersten der Gleichungen (63) identisch und geben für $s = a_{22}$ das Verhältniss $u_1 : u_4 = a_{23} : a_{22}$; die dritte der Gleichungen (63) liefert für u_2 einen willkürlichen Werth; die vierte erfordert, dass $u_3 = 0$ sei. Man kann daher als Verschiebungsaxe eine beliebige, in der Ebene xOy durch O gelegte Gerade wählen; dabei bestimmt sich die entsprechende Winkelverschiebung mit Hilfe der Formel

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{a_{22}}\right)^2}.$$

Für $s = a_{33}$ liefern die Gleichungen (63):

$$u_1 : u_4 = a_{23} : a_{33}, \; u_2 = 0,$$

sowie für u_3 einen willkürlichen Werth. Man kann daher jede in der Ebene yOz durch O gezogene Gerade zur Verschiebungsaxe wählen, wobei die entsprechende Winkelverschiebung durch die Formel

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\left(\frac{a_{23}}{a_{33}}\right)^2 + \left(\frac{u_3}{a_{33}}\right)^2}$$

bestimmt ist.

Der eben betrachtete Fall tritt unter anderem dann ein, wenn das gegebene System ein Kräftepaar $F, -F$ ist, dessen Kräfte in den mit dem Körper unveränderlich verbundenen Punkten (x, y), (x', y') angreifen. Dann wird nämlich

$$a_{22} = (y - y')Y, \; a_{33} = (z - z')Z, \; a_{23} = (y - y')Z, \; a_{32} = (z - z')Y;$$

es ist daher

$$a_{22}a_{33} = a_{23}a_{32},$$

welche Gleichung wegen $a_{23} + a_{32} = 0$ auf die Bedingung (65) führt.

Die Bedingung $a_{23} + a_{32} = 0$ zeigt, dass man als Axen Oy und Oz die Halbirungslinien der Winkel zweier Geraden

OA und OB zu wählen hat, die von O parallel dem Arme des Paares und parallel einer der beiden Kräfte $\overline{F}$, $-\overline{F}$ gezogen sind. Man sieht hieraus, dass man durch Drehung um eine beliebige, in der Ebene xOy oder xOz durch O gezogene Axe die Gerade OA in die Lage OB überführen kann; dadurch erhält man statt des Kräftepaares zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, d. h. zwei Kräfte, die im Gleichgewicht sind.

95. Stellen wir uns nun die Aufgabe, unter der Voraussetzung, dass der Hauptvector $\overline{R}$ nicht gleich Null ist, *eine Verschiebung zu finden, nach welcher das gegebene Kräftesystem sich auf eine Einzelkraft reduciren lässt.*

Die Bedingung der Aufgabe lässt sich durch die Gleichung

$$(L+\Delta L)\Sigma X+(M+\Delta M)\Sigma Y+(N+\Delta N)\Sigma Z=0 \quad (66)$$

ausdrücken, in der für ΔL, ΔM, ΔN die Ausdrücke (18), S. 372, zu setzen sind. Da diese Gleichung in Bezug auf die drei Grössen λ, μ, ν, d. h. auf die Coordinaten des Endpunktes A der auf der Verschiebungsaxe aufgetragenen Strecke $\overline{\Omega}$, vom zweiten Grade ist, so ist sie im Allgemeinen die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung. Es folgt hieraus, dass die Aufgabe unendlich viele Lösungen hat. Jede durch den Ursprung O gehende Gerade, die jene Fläche (66) trifft, kann zur Verschiebungsaxe gewählt werden; die von O nach den beiden Schnittpunkten dieser Geraden mit der Fläche (66) führenden Radienvectoren OA und OA' bestimmen dabei die entsprechenden Winkelverschiebungen φ und φ' nach den Formeln $\tan\frac{\varphi}{2}=OA$ und $\tan\frac{\varphi'}{2}=OA'$. Nach einer in dieser Art bebestimmten Verschiebung reduciren sich die Kräfte auf eine Einzelkraft $\overline{R}$ längs einer Geraden, deren Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} y\Sigma Z-z\Sigma Y&=L+\Delta L,\\ z\Sigma X-x\Sigma Z&=M+\Delta M,\\ x\Sigma Y-y\Sigma X&=N+\Delta N, \end{aligned} \quad (67)$$

wo x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden und ΔL, ΔM, ΔN Functionen der Coordinaten λ, μ, ν des Punktes A oder A' sind. Man kann die Gerade der Bedingung unterwerfen, durch einen gegebenen Punkt (x, y, z) zu gehen, und mit Hilfe der Gleichungen (67) die entsprechen-

den Werthe von λ, μ, ν finden, die die erforderliche Verschiebung des Körpers bestimmen.

Die Lösung der vorliegenden Frage lässt sich auf Grund der folgenden Betrachtungen vereinfachen.

Jede Rotation eines Körpers um eine Axe OA um einen Winkel φ lässt sich ersetzen durch zwei andere auf einander folgende Verschiebungen: 1) eine Rotation um eine andere, zu OA parallele Axe $O'B$ von demselben Sinne, wie die Winkelverschiebung φ und 2) eine Translationsverschiebung, bei der die Verschiebungen aller Punkte des Körpers geometrisch gleich sind der Verschiebung eines beliebigen Punktes der Geraden $O'B$ bei der gegebenen Rotation des Körpers um OA; wenn man also den Abstand der Geraden OA und $O'B$ mit h bezeichnet, so muss diese gemeinsame Translationsverschiebung gleich $2h \sin\frac{\varphi}{2}$ sein. Die Translationsverschiebung verändert das Hauptmoment geometrisch nicht, so dass das Hauptmoment $\overline{K}'$ bezüglich O nach der gegebenen Rotation um OA dasselbe ist, wie das Hauptmoment bezüglich O nach der Rotation des Körpers um $O'B$.

Ist (C) die Centralaxe der Kräfte nach der Rotation um $O'B$, so nimmt dieselbe nach der hinzugefügten Translationsverschiebung die Lage (C') derjenigen Geraden ein, die nach der gegebenen Rotation um OA die Centralaxe repräsentirt. Die Geraden (C) und (C'), die eine verschiedene Lage im Raume haben, haben im Körper, d. h. bezüglich der Angriffspunkte der Kräfte, dieselbe Lage; denn infolge der Translationsverschiebung fällt die mit dem Körper unveränderlich verbundene Gerade (C) mit (C') zusammen. Man kann also bei der Bestimmung der Lage der Centralaxe im Körper nach einer beliebigen Verschiebung diese Verschiebung durch eine andere Rotationsverschiebung um eine durch einen beliebigen Punkt gelegte, der ursprünglichen parallele Axe ersetzen. Auf Grund dieser Bemerkung lassen sich die zur Bestimmung des Hauptmomentes $\overline{K}'$ dienenden Formeln durch eine passende Wahl des Coordinatenursprungs O vereinfachen.

Setzen wir voraus, dass der Hauptvector $\overline{R}$ nicht gleich Null ist und die gegebenen Kräfte eine Centralebene besitzen,

und wählen wir als Coordinatenursprung O den Centralpunkt dieser Ebene, d. h. den Mittelpunkt des Systems von Parallelkräften, welches die Projectionen der gegebenen Kräfte auf Gerade bilden, die durch die Angriffspunkte parallel dem Hauptvector $\overline{R}$ gezogen sind. Wählt man ferner die Axe Ox in der Richtung des Hauptvectors $\overline{R}$, so wird

$$a_{11} = 0,\ a_{21} = 0,\ a_{31} = 0.$$

Endlich sei noch vorausgesetzt, dass die ursprüngliche Lage des Körpers eine solche ist, dass die Centralebene zu dem Hauptvector senkrecht und die Axen Oy und Oz die Schnittlinien dieser Ebene mit den Mittelebenen sind (vergl. § 87). Man hat dann:

$$a_{12} = 0,\ a_{13} = 0,\ a_{23} = 0,\ a_{32} = 0.$$

Lässt man nun nach § 87 im Punkte O zwei Kräfte $\overline{R'}$ und $-\overline{R'}$ in der Richtung der Axe Oy, sowie zwei Kräfte $\overline{R''}$ und $-\overline{R''}$ längs Oz angreifen und macht $\overline{R''} = \overline{R'}$, so erhält man drei dem gegebenen Kräftesystem äquivalente Kräfte, nämlich 1) die im Punkte O angreifende Kraft $\overline{R} - \overline{R'} - \overline{R''}$, 2) eine in einem gewissen Punkte A der Axe Oy angreifende Kraft gleich $\overline{R'}$ und 3) eine in einem gewissen Punkte B der Axe Oz angreifende Kraft gleich $\overline{R''}$.

Macht man nun $R' = R'' = R$ und bezeichnet die Werthe der Coordinaten y und z für die Punkte A und B mit p und q, so hat man

$$a_{22} = Rp,\ a_{33} = Rq$$

und nach den Formeln (18), S. 372:

$$\begin{aligned} \varDelta L &= \frac{2R}{h}\left[(q-p)\mu\nu - (q+p)\lambda\right], \\ \varDelta M &= -\frac{2Rq}{h}(\nu\lambda + \mu), \\ \varDelta N &= \frac{2Rp}{h}(\lambda\mu - \nu). \end{aligned} \tag{68}$$

Mit Hilfe dieser Grössen findet man das Hauptmoment $\overline{K'}$, welches die Kräfte nach der durch die Grössen λ, μ, ν bestimmten Verschiebung bilden. Die Gleichungen (67) der Centralaxe gehen in die folgenden über:

$$zR = \varDelta M,\ -yR = \varDelta N. \tag{69}$$

Auf dieser Geraden hat man die Grösse des kleinsten Momentes

$$K' \cos(K', R) = \Delta L$$

aufzutragen.

Bestimmen wir nun die Lage der Centralaxe im Körper selbst, d. h. die Lage der Geraden (69) bezüglich der Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, welche die Lage repräsentiren, die die unveränderlich mit dem Körper verbundenen Axen Ox, Oy, Oz nach der Verschiebung einnehmen. Setzt man

$$\begin{aligned}
\cos(\xi x) &= a_1, \; \cos(\eta x) = b_1, \; \cos(\zeta x) = c_1, \\
\cos(\xi y) &= a_2, \; \cos(\eta y) = b_2, \; \cos(\zeta y) = c_2, \\
\cos(\xi z) &= a_3, \; \cos(\eta z) = b_3, \; \cos(\zeta z) = c_3,
\end{aligned}$$

so ergiebt sich nach den Formeln (9) § 171 der Kinematik (S. 366):

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{h}(1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2), \; b_1 = \frac{2}{h}(\lambda\mu-\nu), \; c_1 = \frac{2}{h}(\lambda\nu+\mu), \\
a_2 &= \frac{2}{h}(\lambda\mu+\nu), \; b_2 = \frac{1}{h}(1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2), \; c_2 = \frac{2}{h}(\mu\nu-\lambda), \quad (70) \\
a_3 &= \frac{2}{h}(\lambda\nu-\mu), \; b_3 = \frac{2}{h}(\mu\nu+\lambda), \; c_3 = \frac{1}{h}(1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2);
\end{aligned}$$

daher kann man die Formeln (68) in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned}
\Delta L &= (qc_2 - pb_3)R, \\
\Delta M &= -qRc_1, \qquad (71) \\
\Delta N &= pRb_1.
\end{aligned}$$

Bezeichnen ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Centralaxe in Bezug auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ und setzt man

$$c_1\eta - b_1\zeta = l, \; a_1\zeta - c_1\xi = m, \; b_1\xi - a_1\eta = n, \qquad (72)$$

so sind Rl, Rm, Rn die Projectionen des Momentes der längs der Centralaxe gerichteten Kraft $\overline{R}$ auf die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Da aber die geometrische Summe dieses Momentes und des kleinsten Momentes ΔL aller Kräfte gleich dem Momente $\overline{K'}$ ist, so wird:

$$\begin{aligned}
Rl + a_1\Delta L &= K' \cos(K'\xi), \\
Rm + b_1\Delta L &= K' \cos(K'\eta), \qquad (73) \\
Rn + c_1\Delta L &= K' \cos(K'\zeta).
\end{aligned}$$

Das Moment $\overline{K'}$ ist aber auch die geometrische Summe der Momente der parallel Oy und Oz gerichteten Kräfte $\overline{R'_1}$ und $\overline{R''_1}$, die in den Punkten A und B angreifen, deren Coordina-

ten bezüglich $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ resp. (0, p, 0) und (0, 0, q) sind. Daher hat man

$$K' \cos(K'\xi) = R(pc_2 - qb_3),$$
$$K' \cos(K'\eta) = Rqa_3,$$
$$K' \cos(K'\zeta) = -Rpa_2.$$

Durch Vergleichung dieser Formeln mit den Formeln (73) findet man, wenn $\frac{\varDelta L}{R} = k$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} l + a_1 k &= pc_2 - qb_3, \\ m + b_1 k &= qa_3, \\ n + c_1 k &= -pa_2. \end{aligned} \tag{74}$$

Hieraus ergeben sich die gesuchten Gleichungen der Centralaxe in Bezug auf die Coordinatenaxen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, wenn man für l, m, n ihre Ausdrücke aus (72) einsetzt.

Die Quadratsumme der Ausdrücke (73) liefert:

$$R^2(l^2 + m^2 + n^2) + \varDelta L^2 = K'^2;$$

andererseits ist aber

$$K'^2 = \varDelta L^2 + \varDelta M^2 + \varDelta N^2;$$

also ist

$$R^2(l^2 + m^2 + n^2) = \varDelta M^2 + \varDelta N^2.$$

Setzt man hier für $\varDelta M$ und $\varDelta N$ ihre Ausdrücke (71) ein, so ergiebt sich die Gleichung

$$l^2 + m^2 + n^2 = p^2 b_1^2 + q^2 c_1^2 \tag{75}$$

zwischen den Grössen a_1, b_1, c_1, l, m, n, die man als Stralencoordinaten der Centralaxe ansehen kann. Da diese Gleichung bezüglich jener Coordinaten vom zweiten Grade ist, so repräsentirt sie einen Complex zweiter Ordnung. Die Stralen dieses Complexes sind die verschiedenen Lagen im Körper, welche die Centralaxe der Kräfte nach den verschiedenen Verschiebungen einnimmt.

Man kann die Centralaxe der Bedingung unterwerfen, die Ebene yOz in einem gegebenen Punkte (y, z) zu treffen; dann findet man aus den bekannten Coordinaten dieses Punktes nach den Formeln (69) die entsprechenden Grössen $\varDelta M$ und $\varDelta N$, während die Grösse $\varDelta L$ des dieser Centralaxe entsprechenden kleinsten Hauptmoments willkürlich bleibt. Es entsprechen

daher jeder gegebenen Lage der Centralaxe im Raume unendlich viele Verschiebungen des Körpers, die durch die Grössen λ, μ, ν bestimmt sind; diese Grössen genügen dabei zwei Gleichungen, die man durch Elimination von $\varDelta M$ und $\varDelta N$ aus den Gleichungen (69) und (68) erhält, nämlich den Gleichungen:

$$(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)z + 2q(\nu\lambda + \mu) = 0,$$
$$(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)y + 2p(\lambda\mu - \nu) = 0.$$

Es sind dies die Gleichungen der Schnittlinie zweier Flächen zweiter Ordnung.

Aus gegebenem y und z findet man mit Hilfe der Formeln (69) und (71) die Werthe $b_1 = -\frac{y}{p}$ und $c_1 = -\frac{z}{q}$ für die Cosinus der Winkel $\xi O y$ und $\xi O z$; ferner hat man

$$\cos(\xi O x) = a_1 = \pm\sqrt{1 - b_1^2 - c_1^2}.$$

Da nun b_1 und c_1 nicht grösser als Eins sein können, so dürfen die Werthe der Coordinaten y und z nicht grösser als p und q sein. Vermittelst der gefundenen Winkel $\xi O x$, $\xi O y$, $\xi O z$ bestimmt sich die Lage der Axe Ox gegen die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Es giebt zwei solche Lagen, deren eine OD den Werthen

$$b_1,\ c_1,\ +\sqrt{1 - b_1^2 - c_1^2},$$

die andere OD' den Werthen

$$b_1,\ c_1,\ -\sqrt{1 - b_1^2 - c_1^2}$$

entspricht. Jede Verschiebung des Körpers, durch welche die Gerade OD oder OD' in die Axe Ox, d. h. in die Richtung des Hauptvectors $\overline{R}$ übergeführt wird, ist eine der gesuchten. Die Axe einer solchen Verschiebung braucht nur der Bedingung zu genügen, gleiche Winkel mit den Geraden OD und Ox, resp. OD' und Ox zu bilden. Man kann daher als Axe der gesuchten Verschiebung jede durch O gehende Gerade wählen, welche in der den Winkel DOx halbirenden und zur Ebene DOx senkrechten Ebene oder in der den Winkel $D'Ox$ halbirenden und zur Ebene $D'Ox$ senkrechten Ebene liegt.

Substituirt man in Gleichung (75) für b_1 und c_1 ihre Werthe $-\frac{y}{p}$, $-\frac{z}{q}$ und setzt $y^2 + z^2 = \varrho^2$, so erhält man die Gleichung

$$l^2 + m^2 + n^2 = \varrho^2, \tag{76}$$

in der man die Grössen l, m, n als Projectionen des Moments einer der Einheit gleichen Kraft auf die Coordinatenaxen ansehen kann, die mit diesen Axen Winkel bildet, deren Cosinus a_1, b_1, c_1 sind. Die Gleichung zeigt, dass die Grösse dieses Momentes der gegebene Abstand ϱ des Punktes (y, z) vom Coordinatenursprung ist. Es sind daher alle der Axe Ox parallelen Stralen des Complexes (75) Erzeugende eines Kreiscylinders vom Radius ϱ, so dass auch diese Erzeugenden verschiedene Lagen der Centralaxe darstellen, entsprechend solchen Verschiebungen, durch welche OD oder OD' in Ox übergeführt wird.

Suchen wir nun noch die Lage derjenigen Centralaxe im Körper zu bestimmen, die einem gegebenen Werthe des kleinsten Moments, d. h. der Grösse $\varDelta L$ oder des Verhältnisses $\frac{\varDelta L}{R} = k$, entspricht. Diese neue Bedingung liefert eine weitere Gleichung zwischen den Coordinaten a_1, b_1, c_1, l, m, n der Centralaxe; man erhält sie folgendermassen.

Aus den Gleichungen

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

folgt

$$a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + c_1^2;$$

setzt man hierin für a_2 und a_3 ihre Werthe aus (74), nämlich

$$a_2 = -\frac{n + c_1 k}{p}, \quad a_3 = \frac{m + b_1 k}{q}, \tag{77}$$

so folgt:

$$\frac{(n + c_1 k)^2}{p^2} + \frac{(m + b_1 k)^2}{q^2} = b_1^2 + c_1^2. \tag{78}$$

Dies ist die weitere Gleichung, die zwischen den Stralencoordinaten der Centralaxe besteht; sie ist vom zweiten Grade bezüglich dieser Grössen und ist daher die Gleichung eines Complexes zweiter Ordnung. Die Gleichungen (75) und (78) zusammen repräsentiren die Congruenz, welche die den beiden Complexen zweiter Ordnung gemeinsamen Stralen bilden. Jeder Stral einer solchen Congruenz ist eine einem gegebenen kleinsten Momente $\varDelta L$ entsprechende Lage der Centralaxe im Körper.

Unterwirft man nun die Axe noch der Bedingung, die

Ebene yOz in einem gegebenen Punkte (y, z) zu treffen, so findet man nach dem Vorhergehenden aus den Coordinaten dieses Punktes drei Stralencoordinaten a_1, b_1, c_1, welche die Richtung der die Lage der Axe Ox bezüglich $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ darstellenden Geraden OD oder OD' bestimmen. Hiernach bleiben in den Gleichungen (75) und (78) nur die Grössen ξ, η, ζ, die in l, m, n vorkommen, unbestimmt; diese Gleichungen stellen daher zwei Cylinder dar, deren Erzeugende der Geraden OD oder OD' parallel sind.

Da diese Cylinder von der zweiten Ordnung sind, so haben sie im Allgemeinen vier gemeinsame Erzeugende; jede derselben kann als die gesuchte Lage der Centralaxe im Körper angesehen werden, die den beiden Bedingungen genügt, dass sie erstens einem gegebenen Werthe des kleinsten Moments entspricht und zweitens die Ebene yOz in einem gegebenen Punkte trifft. Fügt man zu den Gleichungen (75) und (78) die Gleichung

$$a_1 l + b_1 m + c_1 n = 0$$

hinzu und löst diese drei Gleichungen nach den unbekannten Stralencoordinaten l, m, n auf, so erhält man vier Lösungen, die den erwähnten vier Lagen der Centralaxe entsprechen. Hat man eine dieser Lösungen gewählt, so lassen sich die entsprechenden Werthe von a_2 und a_3 aus den Gleichungen (77) finden; die ersten der Gleichungen (74) und (71) ergeben dann die entsprechenden Werthe

$$c_2 = \frac{(l + a_1 k)p - qk}{p^2 - q^2}, \quad b_3 = \frac{(l + a_1 k)q - pk}{q^2 - p^2}. \tag{79}$$

Endlich erhält man aus den Gleichungen

$$a_3 = b_1 c_2 - c_1 b_2, \quad b_1 = c_2 a_3 - a_2 c_3$$

(s. Kinematik, S. 362, Formeln (3)) die Grössen

$$b_2 = \frac{b_1 c_2 - a_3}{c_1}, \quad c_3 = \frac{c_2 a_3 - b_1}{a_2}.$$

Man kennt nunmehr die Cosinus aller Winkel, welche die Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ mit den Axen Ox, Oy, Oz bilden und findet daher nach den Formeln auf Seite 366 der Kinematik die Grössen

$$\lambda = \frac{b_3 - c_2}{a_1 + b_2 + c_3 + 1}, \quad \mu = \frac{c_1 - a_3}{a_1 + b_2 + c_3 + 1}, \quad \nu = \frac{a_2 - b_1}{a_1 + b_2 + c_3 + 1},$$

welche die Axe der der betreffenden Lage der Centralaxe entsprechenden Verschiebung bestimmen. Endlich ergiebt sich die entsprechende Winkelverschiebung selbst nach der Formel

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{3-a_1-b_2-c_3}{a_1+b_2+c_3+1}}.$$

Unterwirft man die einem gegebenen Werthe von k entsprechende Centralaxe der Bedingung, durch einen gegebenen Punkt (ξ, η, ζ) des Körpers zu gehen, so hat man zur Bestimmung der Stralencoordinaten a_1, b_1, c_1 dieser Geraden die Gleichung

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$$

und die beiden Gleichungen (75) und (78), in denen man für ξ, η, ζ die Coordinaten des gegebenen Punktes zu setzen hat. Da (75) und (78) für die Unbekannten a_1, b_1, c_1 vom zweiten Grade sind, so stellen sie zwei Kegel zweiter Ordnung dar, die eine gemeinsame Spitze O haben. Dieselben haben daher im Allgemeinen vier gemeinsame Erzeugende; jede durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehende und einer dieser gemeinsamen Erzeugenden parallele Gerade repräsentirt eine den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Lage der Centralaxe. Bei gegebenen ξ, η, ζ liefern die Gleichungen (75) und (78) vier Werthsysteme für $\frac{b_1}{a_1}$ und $\frac{c_1}{a_1}$, und jedem dieser Systeme entsprechen infolge der Gleichung

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$$

zwei Werthe a_1, die gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind; diesen beiden Werthen von a_1 entsprechen dann gleichfalls je zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von b_1 und c_1. Es entspricht also jedem, den Gleichungen (75) und (78) genügenden Systeme der Grössen a_1, b_1, c_1 ein denselben Gleichungen gleichfalls genügendes System $-a_1$, $-b_1$, $-c_1$; aber beide Systeme bestimmen die Lage einer und derselben Geraden. Es genügt daher, nur vier der Werthsysteme a_1, b_1, c_1, die den Gleichungen (75) und (78) genügen, zu betrachten. Sind a_1, b_1, c_1 bestimmt, so findet man aus den Formeln (72) die übrigen Stralencoordinaten l, m, n der gesuchten Geraden. Hierauf ergeben sich, wie im vorigen Falle, die Cosinus

der Winkel der Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ mit den Axen Ox, Oy, Oz, sowie die Grössen λ, μ, ν, welche die der fraglichen Centralaxe entsprechende Verschiebung bestimmen.

Die Gleichungen (75) und (78) der Congruenz lassen sich in folgender Weise durch zwei andere ersetzen.

Aus den Gleichungen, die zwischen den Cosinus der Winkel der Axen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ mit Ox, Oy, Oz bestehen, ergeben sich leicht die Gleichungen

$$a_3^2 + b_3^2 - c_2^2 = c_1^2, \quad c_2^2 - b_3^2 + a_2^2 = b_1^2;$$

substituirt man hierin für a_2, a_3, c_2, b_3 ihre Ausdrücke (77) und (79), so ergeben sich Gleichungen, in denen nur die Grössen a_1, b_1, c_1, l, m, n vorkommen, nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{(m + b_1 k)^2}{q^2} + \frac{(l + a_1 k)^2 - k^2}{q^2 - p^2} &= c_1^2, \\ \frac{(n + c_1 k)^2}{p^2} + \frac{(l + a_1 k)^2 - k^2}{p^2 - q^2} &= b_1^2. \end{aligned} \tag{80}$$

Diese Gleichungen sind gleichbedeutend mit den Gleichungen (75) und (78); denn addirt man sie, so erhält man sofort (78); addirt man sie dagegen, nachdem man sie zuvor resp. mit q^2 und p^2 multiplicirt hat, so ergiebt sich Gleichung (75). Folglich ist die einem gegebenen Werthe des kleinsten Hauptmoments $\varDelta L = Rk$ entsprechende Centralaxe ein Stral der Congruenz (80).

Betrachten wir nun den Specialfall $k = 0$, d. h. stellen wir uns die Aufgabe, eine derartige Verschiebung des Körpers zu finden, nach welcher alle Kräfte sich auf eine einzige Resultante reduciren lassen, und die Lage derjenigen Geraden im Körper zu bestimmen, längs welcher diese Kraft gerichtet sein muss.

Setzt man in Gleichung (80) $k = 0$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{q^2} + \frac{l^2}{q^2 - p^2} &= c_1^2, \\ \frac{n^2}{p^2} + \frac{l^2}{p^2 - q^2} &= b_1^2. \end{aligned} \tag{81}$$

Die Stralen dieser Congruenz repräsentiren im Körper diejenigen Lagen der Resultante, die den Verschiebungen entsprechen, nach welchen die Kräfte einer Einzelkraft äquivalent werden. Minding hat gezeigt, dass alle diese Geraden sich

an zwei mit dem Körper unveränderlich verbundene Curven anlehnen, die in den Ebenen $\eta O \xi$ und $\zeta O \xi$ liegen; es sind dies eine Ellipse und eine Hyperbel, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Punkt O und deren Hauptdurchmesser die Axe $O\xi$ ist, auf welcher die Brennpunkte der beiden Curven so vertheilt sind, dass die Brennpunkte der einen Curve die Scheitel der anderen sind.

Um diesen merkwürdigen Satz zu beweisen, betrachten wir die Spuren der Stralen der Congruenz (81) in den Ebenen $\eta O \xi$ und $\zeta O \xi$. Die Spuren in der ersten dieser beiden Ebenen genügen den Gleichungen

$$\zeta = 0, \quad \left(\frac{\xi^2}{q^2} + \frac{\eta^2}{q^2 - p^2} - 1\right) c_1^2 = 0; \tag{82}$$

die Spuren in der zweiten Ebene erfüllen die Gleichungen

$$\eta = 0, \quad \left(\frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\zeta^2}{p^2 - q^2} - 1\right) b_1^2 = 0. \tag{83}$$

Sind c_1 und b_1 nicht gleich Null, d. h. ist der betreffende Stral weder der Ebene $\eta O \xi$ noch der Ebene $\zeta O \xi$ parallel und liegt er auch in keiner von ihnen, so muss man haben:

$$\frac{\xi^2}{q^2} + \frac{\eta^2}{q^2 - p^2} = 1, \tag{84}$$

$$\frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\zeta^2}{p^2 - q^2} = 1. \tag{85}$$

Dies sind aber die Gleichungen zweier Curven zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt O und deren Hauptdurchmesser die Axe $O\xi$ ist.

Für $p > q$ ist die Curve (84) eine Hyperbel von der Excentricität p, die Curve (85) aber eine Ellipse, deren grosse Axe gleich $2p$ ist. Ist dagegen $q > p$, so ist (84) eine Ellipse, deren grosse Axe gleich $2q$, und (85) eine Hyperbel, deren Excentricität gleich q ist. In beiden Fällen liegen also die Scheitel der einen Curve in den Brennpunkten der anderen.

Für einen, der Ebene $\eta O \xi$ parallelen oder in dieser Ebene liegenden Stral ist $c_1 = 0$, also nach der ersten der Gleichungen (81):

$$\left(\frac{a_1^2}{q^2} + \frac{b_1^2}{q^2 - p^2}\right) \zeta^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn man setzt

$$\frac{a_1^2}{q^2} + \frac{b_1^2}{q^2 - p^2} = 0 \text{ oder } \zeta = 0. \tag{86}$$

Im Falle $q > p$ ist das erstere nicht möglich; folglich muss $\zeta = 0$ sein, d. h. der Stral muss in der Ebene $\eta O \xi$ liegen. Ein solcher Stral schneidet die Hyperbel (85) im Punkte $\zeta = 0$, $\xi = \pm p$, d. h. in einem der Scheitelpunkte der Curve. Da aber dieser Punkt der Brennpunkt der Ellipse (84) ist und daher innerhalb dieser Curve liegt, so muss der betreffende Stral die Ellipse schneiden. Er stützt sich somit auf beide Curven (84) und (85). Im Falle $p > q$ ist die erste der Gleichungen (86) zulässig, und es braucht ζ nicht gleich Null zu sein. Dies liefert einen Stral, der der Asymptote der Hyperbel (84) parallel ist, d. h. der diese Curve im Unendlichen schneidet. Da aber b_1 nicht gleich Null ist, so reducirt sich die Gleichung (83) auf Gleichung (85); der Stral muss somit die Ellipse (85) schneiden.

Ebenso findet man, dass ein Stral, für den $b_1 = 0$ ist, in der Ebene $\zeta O \xi$ liegt oder der Asymptote der Hyperbel (85) parallel ist. Ist endlich $b_1 = 0$ und $c_1 = 0$, so fällt der Stral mit der Axe $O\xi$ zusammen. Man sieht hieraus, dass sich alle Stralen der Congruenz (81) ohne Ausnahme an die beiden Curven (84) und (85) lehnen; diese Curven sind daher die Directricen der Congruenz.

Einige weitere Untersuchungen über die in diesem Capitel behandelten Fragen findet man in den folgenden Werken:

Möbius, Lehrbuch der Statik, 1837.

Minding, verschiedene Abhandlungen im 14. und 15. Bande von Crelle's Journal.

Moigno, Leçons de Mécanique analytique. I. Statique.





Stanford University Libraries
3 6105 014 651 876